問１　反転分布を用意する間は Q が低いが、光パルスが形成される時には Q が高い。だから、パルスの立ち上がりは、誘導放出の確率で決まる。立下りは、反転分布の減衰できまる。Q スイッチ動作のシミュレーションでは，与えられたレート方程式の初期条件として適度に高い反転分布を仮定する：

真空中の光速度 $c := 3 \cdot 10^{10} \cdot cm \cdot sec^{-1}$　　素電荷　$e := 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot coul$

屈折率　$n := 3.5$

キャリヤの減衰時定数 $T := (10)^{-9} \cdot sec$

光子の減衰定数　$Tp := (10)^{-12} \cdot sec$

吸収ゼロのキャリヤ密度　$Ntr := 1.55 \cdot 10^{18} \cdot cm^{-3}$

キャリヤ密度と増幅係数(cm-1)の比　$B := 1.5 \cdot 10^{-16} \cdot cm^2$

誘導放出係数

ミクロン　$micron := 10^{-6} \cdot m$　　$A := B \cdot \frac{c}{n}$

活性領域の体積

$L := 200 \cdot micron$

$area := 0.1 \cdot 2 \cdot micron^2$

$V := L \cdot area$

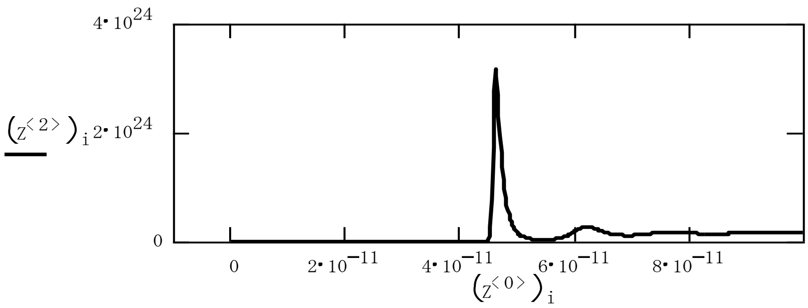
半導体レーザーの発振を記述するレート方程式を適切な初期条件で解きQスイッチ動作

$$x := \begin{pmatrix} 0 \\ 0.000001 \end{pmatrix} \qquad I := 1 \cdot amp$$

$$D(t,x) := \begin{bmatrix} \left(\frac{I}{e \cdot V} - \frac{x_0}{T}\right) \cdot 1 - A \cdot \left(x_0 - Ntr\right) \cdot x_1 \\ A \cdot \left(x_0 - Ntr\right) \cdot x_1 - \frac{x_1}{Tp} \end{bmatrix}$$

$$Z := rkfixed\left(x, 0, 0.1 \cdot 10^{-9}, 500, D\right)$$

$$i := 0..499$$



問 2　パルスの時間間隔は、モードの周波数間隔により決まる。パルスの幅は、どれだけ広い周波数範囲のモードを用いたかで決まる。すべてフーリエ変換の議論を使えば分かる。

次に、数値例を示す：

モード同期パルスの発生のシミュレーション

観察時間を $t := 0, 0.001 .. 0.2$

基本周波数を無名数で $w := 2 \cdot \pi \cdot 10$

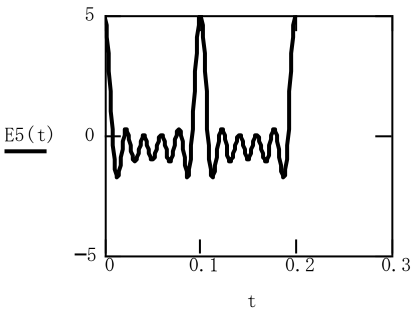
とした。以下のシミュレーションでは、中心周波数(本来は、たとえば光の振動数とすべきかもしれないが、簡単のためにゼロとおく)から、周波数 w おきにたくさんの波が、互いの位相を固定したうえで重ね合わされる状況を考える。

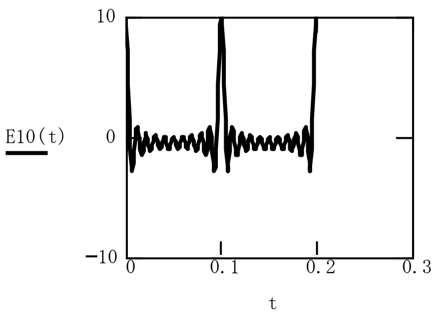
振幅が等しく１である波がｗのスペーシングで5個ある場合と10個ある場合について：

モード同期した合成の振幅は

$$E5(t) := \sum_{n=1}^{5} \cos(n \cdot w \cdot t) \qquad E10(t) := \sum_{n=1}^{10} \cos(n \cdot w \cdot t)$$

これらを図示すると

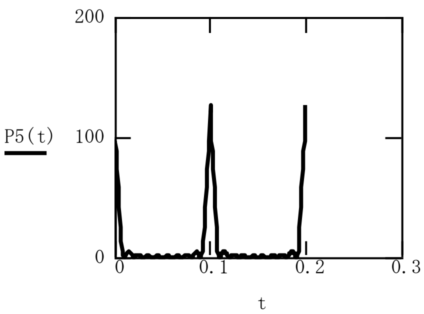


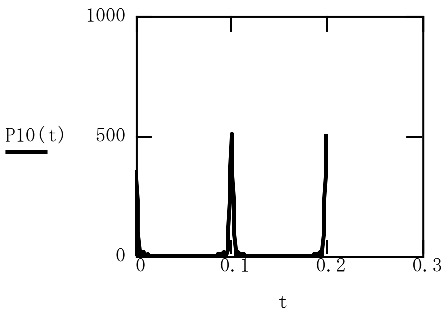


$$P5(t) := \left[\left| \frac{\sin(5 \cdot w \cdot t)}{\sin\left[w \cdot \left(\frac{t}{2} \right) \right]} \right| \right]^2 \qquad P10(t) := \left(\left| \frac{\sin(10 \cdot w \cdot t)}{\sin\left(w \cdot \frac{t}{2} \right)} \right| \right)^2$$

であることをチェックのために使い

パワーにすれば





同一の時間幅の中に放出されるエネルギーを積算すると

$$\int_0^{15} P5(t)\,dt = 149.944 \qquad \int_0^{15} P10(t)\,dt = 299.888$$

である。振幅の等しい5個の波と10個の波では、2倍エネルギーが違って当然である。

問 3

4.5GHz の線幅は、ほぼ 200ps のパルス幅に対応している。(共振器内の屈折率を 1 として)$3x10^8/(2x1.5)$=100MHz が繰り返し周期である。100MHz のパルスで、かつ 10W の出力だから、1s に１0J のエネルギーが 10^8 個のパルスで構成されている:一個のパルスは 10^{-7} J のエネルギーをもつ。これが 200ps の幅の中に注入されるから、ピークパワーは 0.5ｋW 程度である。

数学的な背景

フーリエ変換の定義： $F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt, \qquad f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega$

デルタ関数： $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-i\omega t}dt = e^{-i\omega\times 0}=1, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)e^{-i\omega t}dt = e^{-i\omega\times nT}$

くし型関数 $:\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$; 周期 T $\rightarrow$ フーリエ級数の k 番目の成分の係数は

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)e^{-2\pi i\frac{t}{T}}=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\delta(t)e^{-2\pi i\frac{t}{T}}dt=\frac{1}{T}$$

$\rightarrow \qquad f(t)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{2\pi i\frac{t}{T}\times k}:\frac{2\pi}{T}\times k$ なる周波数成分が等間隔に並ぶ

$\therefore \qquad F(\omega)=\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\frac{2\pi}{T})$: 再び，くし型

ガウス型関数：

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(at)^2}e^{-i\omega t}dt = e^{-\frac{\omega^2}{4\pi a^2}}$$

再び　ガウス型

積のフーリエ変換は，フーリエ変換の畳み込み積分

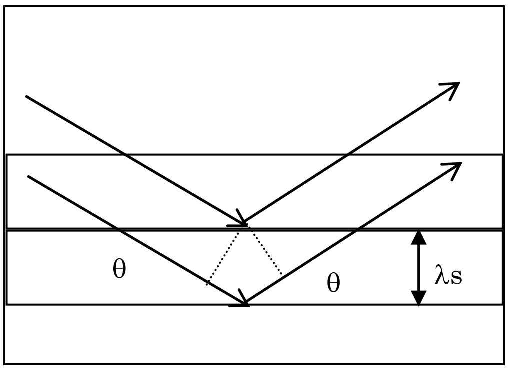
周波数軸上で，くし型関数とガウス関数の積.

そのフーリエ変換はくし型関数とガウス関数の畳み込み

畳み込み積分は，２つの関数をずらして積をつくり，寄せ集めること．したがって，もともと幅が 0 であったくし型関数にフーリエ変換後のガウス関数の幅が付与される.

問 4

数十本の発振線のモードを同期するために、共振器内に小さな AO(音響光学効果を使った)変調器を挿入して、あるべきモードロックパルスだけを通過させるようにタイミングゲートを作る。AO 素子に用いる固体（たとえばクォーツ)は、電圧を加えるとひずむので、RF の電圧を加えることで内部に音波が生じる。固体内の音速をたとえば 2km/s 程度とすると、50MHz の音波の波長は 40 ミクロンである（2 km/s / 50 MHz = 40 μm)。固体中の疎密波は屈折率の疎密波でもあるから、これにより



Bragg 散乱が起きる。

(最低次の散乱について) $2\lambda_s \sin\theta = \lambda$ だから、散乱角 2θ ~ λ/λs = 0.5/40 〜0.01 rad=1 度になる。なぜモードロック周期の半分の RF を使うか？音波の振幅のピークが一周期の間に 2 回来るから！

AO 変調器によるモードロック機構は次のようなものである。変調器(1cm 程度)を光パルスが通過するのに要する時間は RF 変調周期よりもずっと短いから、光パルスは AO 変調器の瞬時の屈折率を感じる。この光パルスが共振器内でレーザー発振モードとして生き残るためには、1 往復の後に位相を自己再生しなければならない。変調器の屈折率が異なるときに来たパルスは異なる位相になって自己再生しなくなってしまう。正確にモードロックパルスの間隔で来る次のパルスだけが同じ屈折率を感じて自己再生する。

光ビームの偏向：要求された偏向角は 0.01 ラジアン程度である。問題文のデバイスでは 50MHz の音波で 0.01 ラジアン程度偏向する計算だった．一般に RF 回路および結晶の音響的な設計では，ＤＣ～50MHz の帯域をカバーするより，中心周波数を一桁程度上げてその中心周波数のまわりに必要な周波数の変調を加えるほうが容易である．したがって，たとえば中心周波数を 200MHz として変調周波数を 50MHz とすることになる．（モードロック用の RF 周波数は軸モードの間隔で決まり，周波数は固定なので，偏向用の用途とは異なる話題である．）

モードロックは、同期的にポンピングを行ったり、共振器内部に可飽和吸収体をおいたりして実現できる場合もある。

半導体レーザーでモードロックを実現しようとすると、素子のサイズが小さいために、「多数のモードを利得幅内に作り出すこと、およびモードを同期させるための装置を組み込むこと」が難しく、外部共振器を設けざるをえない。実験例は報告されているが、素子が小さいことを特色とした用途とは相容れない。注入電流を変調する方法で 10ps のパルスが比較的容易に作れる。直接変調と半導体レーザーとの相性がよいことは明白である。