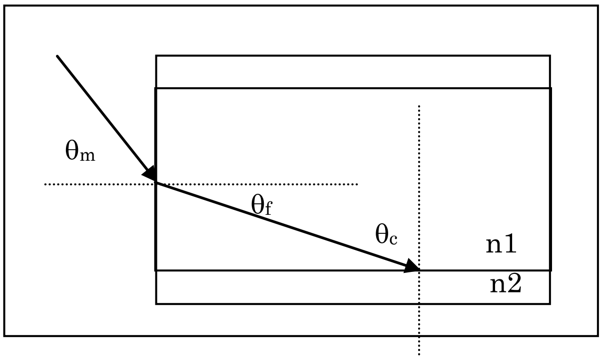
問１



θm で入射した光を追跡するとコア n_1 とクラッド n_2 の界面で全反射をしている。その臨界角は $\sin\theta_c = \dfrac{n_2}{n_1}$ から決まる。この臨界角で進入する光線をもとにたどり，導波路端面で入射角 θ_m， 屈折角 θ_f の屈折をしていたとする。この屈折にスネルの法則を適用すると $\dfrac{\sin\theta_m}{\sin\theta_f} = \dfrac{n_1}{1} = n_1$ である。これより

$$\sin\theta_m = n_1 \sin\theta_f = n_1\cos\theta_c$$

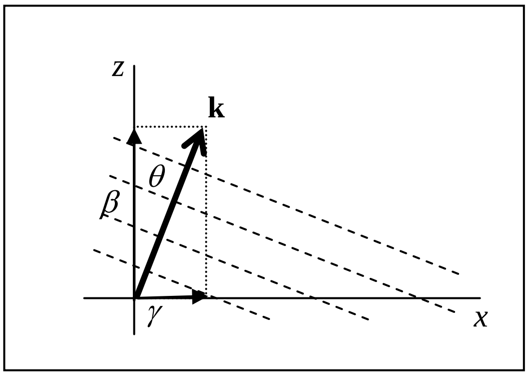
$$= n_1\sqrt{1-\sin^2\theta_c} = n_1\sqrt{1-\frac{n_2^{\ 2}}{n_1^{\ 2}}} = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} = \sqrt{1.6^2 - 1.5^2} \approx 0.557$$

よって $\theta_m \approx 0.591$ (33.83 度) が受光角である。これ以上大きな角度で入射すると，コアからクラッドへ全反射を起こさずに漏れだし，わずかな距離進む間にコア内の光強度が減衰して，導波路による伝達が起きない。

光線は来た道を逆にたどって進むことができる。よって，導波路を伝播した光が端面か射出されるとき，光は θ_m の広がりを持つ。

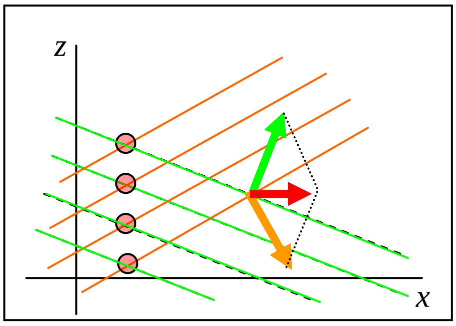
問２

(i)　波数ベクトルの x 成分は $\gamma = k\sin\theta$,　z 成分は $\beta = k\cos\theta$ である。（ii）に移る前に基本的な事項を復習しよう。



（A）(i)の成分表示が持つ意味を理解するために図を観察せよ。破線は波数ベクトル $\mathbf{k}$ の平面波の等位相面である。たとえば x 軸上でこの波を観測すると波長が長くなる。 $\mathbf{k}$ の長さは波長の逆数に比例する（$k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$）からγは小さくなる。図から波長が $1/\sin\theta$ となるので，$\gamma = k\sin\theta$ である。一方，どの一点で観測しても振動数は同じである。その結果， x 軸上で観測した波は $kv_x = \omega$ の関係から位相速度 v_x が大きくなる。ある光の振動数は，どこに行っても，異なる媒質を通過するときも，一定であることは記憶に値する（例外は，ドップラー効果や重力による変化だが，ここではそのような現象は考える必要がない)。振動数が変わらないから，媒質の屈

折率が決まれば，波長λが決まり，波数ベクトルの大きさ$k=\dfrac{2\pi}{\lambda}$が決まる。



（B）次に伝播モードの次数と位相速度の関係に注目しよう。図の○が z 方向にできる定在波の節である。**k** ベクトル（→や→で表される）の z 方向成分の波長が短くβが大きいと次数の高いモードとなる。（z 方向にできる定在波の節の間隔が狭まりコア中で節の数が多くなる。）**k** の大きさはコア中で一定だから，θが大きくなりモードの次数が高くなると，伝播方向である x 方向の波数成分γが小さくなり，伝播方向の波長が長い。

周波数が同じで波長が長ければ位相速度は大きい（これは位相速度の定義に他ならない）。したがって，周波数を固定しておけば，次数が高くなるほど伝播方向の位相速度は大きい。同じことだが，次数の低いモードほど伝播方向の位相速度が小さくなる。

モードが伝播モードとなるためには「位相速度が虚数にならない」ことが条件なので，最低の次数が存在する。別の言い方をしよう。あるモードを指定することと，k ベクトルの z 方向成分βを決めることは等価である。だから，そのモードを保ったまま（すなわちβを一定にしたまま），光周波数を下げて k ベクトルの長さを小さくしていくと，$k^2=k_x{}^2+k_z{}^2=\gamma^2+\beta^2$の関係から，伝播方向である x 方向成分$\gamma$はあるところから先では虚数にならざるを得ない。このとき波の振幅が x 方向には指数関数で減衰し，伝播しない波（波とは言えないのかもしれない）となる。これが「遮断」周波数という言葉の意味である。

（C）以上の議論を定量化しよう。全反射による位相遅れ（グースヘンシェン・シフト）を無視できる場合について，導波路内の位相速度および群速度を求める。

コア物質の誘電率を持つ無限に広い均一な媒質の中での位相速度を c (=真空の光速度を屈折率で割ったもの)とする。また導波路の x 方向の位相速度をv_pとする。

$kc=\omega$，$k_x v_p=\omega$だから，$k^2=k_x{}^2+k_z{}^2$の関係式は$\left(\dfrac{\omega}{c}\right)^2=\left(\dfrac{\omega}{v_p}\right)^2+k_z{}^2$と書き直せる。

さらに書き換えて，$\left(\dfrac{\omega}{v_p}\right)=\sqrt{\left(\dfrac{\omega}{c}\right)^2-k_z{}^2}$とし，両辺の逆数をとり$\dfrac{v_p}{\omega}=\dfrac{1}{\sqrt{\omega^2\dfrac{1}{c^2}-k_z^2}}$ で

ある。こうして $v_p = \frac{c}{\sqrt{1-c^2\frac{k_z^2}{\omega^2}}}$ を得る。$k_z c = \omega_c$ と書くなら，$\underline{\underline{v_p = \frac{c}{\sqrt{1-(\omega_c/\omega)^2}}}}$ となる。この式が位相速度の周波数依存性を表す。内容は（B）に述べたものであるが，ω$_c$ よりも低いωでは分母の平方根の中が負となり，位相速度が虚数，すなわちω$_c$ より低い周波数が伝播しないことを表す。ω$_c$ が遮断周波数である。$k_z c = \omega_c$ だから，k_z が大きければ遮断周波数も高くなる。つまりモードが高次になると遮断周波数が高くなる。

次に群速度を求める．まず位相速度の分散関係を考える。上で求めた位相速度は周波数と波数を使って $v_p = \frac{\omega}{k_x}$ である。すなわち $\frac{\omega}{k_x} = \frac{c}{\sqrt{1-\ \omega_c/\omega\ ^2}}$ である。この両辺を二乗し整理すると，$\omega^2 - \omega_c^2 = c^2 k_x^2$ となり分散関係 $\underline{\underline{\omega = \sqrt{c^2 k_x^2 + \omega_c^2}}}$ を得る(これを図示すると，あたかも質量をもつ粒子の分散関係と同じ形をするので興味深い)。群速度を求めるには，ωを k_x で微分すればよいのだが，計算上はむしろ $\omega^2 - \omega_c^2 = c^2 k_x^2$ にもどり，両辺の微小増分を比較すると簡単である。実際，$2\omega d\omega = c^2 2k_x dk_x$ だから，

$\frac{d\omega}{dk_x} = c^2\frac{k_x}{\omega} = c^2\frac{\sqrt{1-\ \omega_c/\omega\ ^2}}{c}$ となる。群速度は $\underline{v_g = c\sqrt{1-(\omega_c/\omega)^2}}$ である。群速度に対しても ω_c が遮断周波数となる。ωが遮断周波数より下がると，群速度も虚数となるので伝播できない。

先に「モード次数が上がると位相速度が大きくなる」という議論を行ったが，このときはωを固定してω$_c$ を大きくし，v_p の変化を読んでいる。一方，信号を伝える光パルス(従ってエネルギー)の伝達を考えるときに必要な<u>群速度</u>は，次数が高いほど遅くなる。これは，光線の伝播距離（次数が高いものほど z 方向のジグザグ運動が頻繁に起こり，x 方向に同じ距離だけ進むにも時間が余計にかかる）を考えると直感的にも理解できる。

各モードによって遮断周波数が異なり，次数が高いほど遮断周波数の値は大きくなるので，たとえば 1 次のモードと 2 次のモードの遮断周波数の間の周波数を注入したとき，1 次と 0 次のモード（=最低次を「0 次」と呼んだ）で伝播が起きる．すなわち多モードの伝播である。このとき，信号は 2 つのモードの群速度の差のために伝播に伴って波形が崩れる．これがモード分散と呼ばれる現象の本質である。

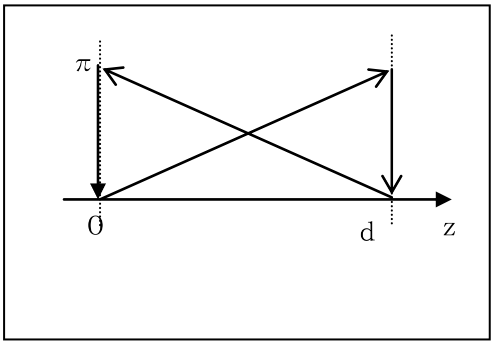
誘電体導波路の場合には，高次側では全反射が起きなくなって伝達しなくなる効果もさらにある。遮断周波数とあわせて，波長と構造をうまく選べば単一のモードしか

存在しない条件を選ぶことができるので「モードによる伝播速度の差」による分散の効果をなくすことができ，長距離光のファイバー通信で重要になる。

(ii) $\Psi = 2d \cdot \beta = k\left(2d \cdot \cos\theta\right) = 2\pi \cdot N$

コアの厚み d と，コアの屈折率および光周波数が決まると k が決まる。そうすると，z 方向の定在波条件が決まる。往きの進行波と帰りの進行波が干渉して定在波がつくられるが，戻ってきた波が境界で反射されたあとで，往きの波との位相が一致しないと，往きの波どうしが干渉して強度が減る。たくさんの位相が異なる「往きの波」が干渉すると，強度が0になる。そうならないためには，z 方向に1回往復すると位相がもとの値にもどる必要がある。正確には，１往復の光路差で生じる位相差が2πの整数倍である。$\sin\left(kx - \omega t\right)$ の形の進行波において，距離 d だけ離れた2点の位相差が kd だから，

$\Psi = 2d \cdot \beta = k\left(2d \cdot \cos\theta\right) = 2\pi \cdot N$ （N整数）が条件である。



以上の内容をグラフ化してみよう。導波路内 z 方向にそって波の位相変化を追跡してグラフにするのである。左の図は，横軸が z 方向の位置，縦軸がその点における波の位相を表す。原点は一方の境界面にとっている。原点における位相がゼロとなっている（z＝0 で位相が0となっているが，これは基準をそこにとったという意味）。z 軸正方向に進む波の位相が βz である。すなわちこの波が z 方向に進むと位相 βz が増加する。その間の位相が図の右上がりの直線の高さによって表される。$z = d$ の位置で位相が βd 。この位置で波が理想的な金属面での反射条件（界面で電場が 0 となる条件）で反射されると位相が π だけ変化する。これを下向きの矢印で表現している。位相は $\beta d - \pi$ に変化する。反射した波は z 軸を負の方向に進む。それは図の右下がりの直線で示される。この波の位相は

$$\beta d - \pi - \beta(z - d) = 2\beta d - \pi - \beta z$$

となる。$z = 0$ で境界に到達する直前の位相は $2\beta d - \pi$ であり，境界で反射が起きると位相が π だけ変化し（下向き矢印）

$$2\beta d - \pi - \pi = 2\beta d - 2\pi$$

となる。この位相と出発したときの位相が一致した波だけ生き残る(2π の整数倍だけ異なっても同じ事)。よって

$$2\beta d - 2\pi = 0,\ 2\pi,\ 4\pi,\ 6\pi,\ \ldots$$

あるいは

$$\beta d = N\pi$$

となり冒頭で与えた関係が導かれる。

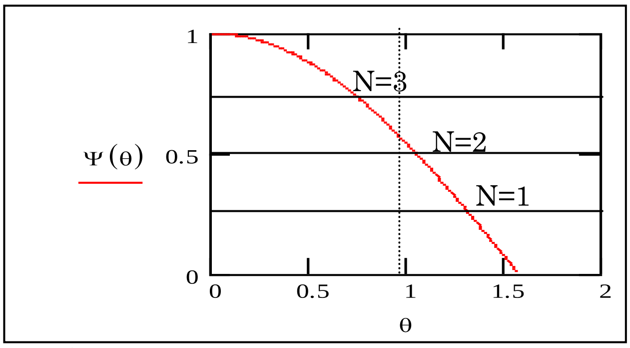
z が 0 から d の間では，往きの進行波と帰りの進行波が干渉している。波を複素指数関数で表し定在波を表そう（サイン，コサインを用いてもよいが，位相の変化を見渡すには複素指数関数のほうが楽である）。往きの進行波は $e^{i(\beta z-\omega t)}$，帰りの進行波は $e^{i((2\beta d-\pi-\beta z)-\omega t)}$ であるから，両者が重ね合わされた状態では

$$e^{i(\beta z-\omega t)} + e^{i((2\beta d-\pi-\beta z)-\omega t)}$$

が振幅であり，定在波条件 $\beta d = N\pi$ を入れると，振幅は

$$\begin{aligned} &e^{-i\omega t}\left(e^{i\beta z}+e^{-i\beta z+2i\beta d-i\pi}\right)=e^{-i\omega t}\left(e^{i\beta z}+e^{-i\beta z+i2\pi N-i\pi}\right) \\ &=e^{-i\omega t}\left(e^{i\beta z}+e^{-i\beta z}e^{i(2N-1)\pi}\right)=e^{-i\omega t}\left(e^{i\beta z}-e^{-i\beta z}\right) \\ &=2ie^{-i\omega t}\sin\beta z \end{aligned}$$

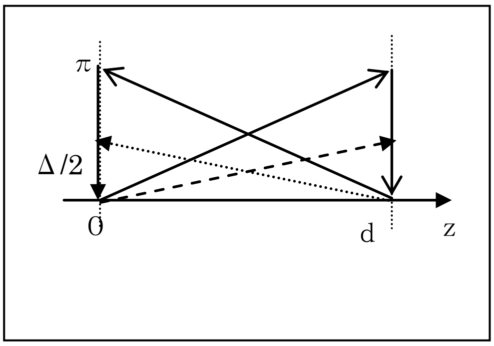
となる。これより，たしかに両端 z＝0 と d とで振幅がゼロであることが確かめられる。



コア厚が $d = 2\,\mu$m，コア内波長が 1 μm なら $d\times k$ ＝ d $2\pi/\lambda$ =4π，Ψ =2kdcos θ =2×4 π cos θ =2 π N ．従って cosθ＝ N/4がコア内で z 方向に定在波がたつ条件である。(N= 0, すなわちθ= 90 度のときは， z 方向には電場が変化しないモードである．言い換えると波面が進行方向と垂直方向に無限に広がっている平面波となり，光のエネルギーを導波路内に閉込めることはできない。）こうしてN= 1が導波路モードの最低次であり，θ = 75.5 度である。このとき， z 方向に1往復すると2π（すなわち1波長）の位相差が生じるのだから，導波路内には半波長の定在波がたっている。定在波の節（振幅が常にゼロの位置）は界面だけに存在し，中央では最大振幅となっている。最大次数のN= 4 はコサインの値が1だから，θ= 0 度である。これは波数ベクトルの x 方向成分がゼロとなり伝播しない。こうして，N= 1,2,3だけが z 方向に定在波を作り，かつ x 方向に進行波する「可能性のある」モードである。具体的には，N= 2 で 60 度，N= 3で41.4度となる。一方，n = 1.2 の屈折率比による全反射の臨界角は 56.4度（0.984 rad）だから，N= 3 の角は臨界角に満たないことになり、界面からエネルギーが逃げて伝播モードになれない。以上をグラフで表すと上のようになる。

(iii)全反射によりｓ波の位相は１往復（２回反射）で$\Delta = 2 \times \arg\left[\dfrac{n\cos\theta + i\sqrt{n^2\sin^2\theta - 1}}{n\cos\theta - i\sqrt{n^2\sin^2\theta - 1}}\right]$

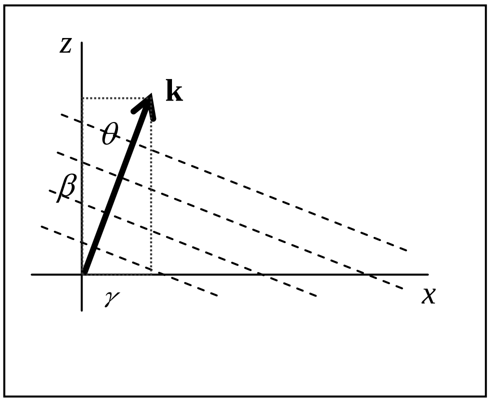
だけ遅れる。この位相の「遅れ」は，結局のところ，波が界面よりも外側に染み出してから追い返されること（グース・ヘンシェン効果）を内包している。(ii)の解析では，1 回の反射に対し位相遅れπを仮定していたことである。この位相遅れπをクラッド・コア界面での全反射で実現するには，界面と平行に入射（θ= 90 度）しなければならならず，（先の N=0 の場合と同様）実現できない条件である。



(iv) (ii)では２回の界面全反射による位相変化がΔ＝２πであった。これを(iii)の位相角の場合に拡張して定在波条件を表すと

$2\beta d - \Delta = 0,\ 2\pi,\ 4\pi,\ \ldots$

である（左辺は，波が空間をｚ方向に進むことによる位相変化と全反射による位相変化の加算を表す）．(ii)の位相追跡の図（実線）と一般的なΔで全反射する場合（点線）とを重ねてみると，全反射で帰ってきた波がもとの波と同じ位相になり定在波をつくるには，（πの場合にくらべて）伝播による位相の変化が緩やか（図で傾斜が小）でなければならないことがわかる。



位相の変化が緩やかとは，波の波長が長いということ．したがって，グースヘンシェン効果でコアから外に電場が染み出す場合には，定在波を表す波長は長くなる。数学的には「ｚ方向の波の微分方程式を解くときに，界面で電場の値と電場の変化率を等しくし，なめらかに電場がつながる」という境界条件（クラッド内で指数関数的に減衰する電場と，コア内のサイン関数を滑らかにつなげる）を満たすようサイン波が決まることに対応する。サイン関数の波長が長ければ，その波長の逆数に比例するβは小さく点線の傾きが小さい。

以上から，ｚ 方向の波長を長くするということは，波数ベクトルの z 方向成分を小さくすること，つまり角θを大きくすればよいという結論になる。

(v) 与条件に対して，$2\beta d - \Delta = 0,\ 2\pi,\ 4\pi,\ \ldots$を満たす条件を求める．$\Psi = 2\beta d$であった。

長さの単位を1μとして　$\lambda := 1$　　$d := 2$　　$k := 2\cdot\frac{\pi}{\lambda}$

比屈折率を $n := 1.2$ とすると全反射の臨界角は$\theta c := \mathrm{asin}\left(\frac{1}{n}\right)$　$\theta c = 0.985$

臨界角よりも大きい、全反射のモードで$\theta := \theta c, \theta c + 0.01 .. \frac{\pi}{2}$

のように変化させてグラフを描く。

光がz軸方向の伝播の過程で、等価の位置にもどるとき、その位相2πの整数倍ずれているのが定在波の条件である。位相ずれの原因は、伝播と全反射の両方にある。 2πの整数倍を伝播の方に吸収した形で表すと、

$h0(\theta) := 2\cdot d\cdot k\cdot\cos(\theta) - 2\cdot\pi\cdot 0$

$h1(\theta) := 2\cdot d\cdot k\cdot\cos(\theta) - 2\cdot\pi\cdot 1$　　$h2(\theta) := 2\cdot d\cdot k\cdot\cos(\theta) - 2\cdot\pi\cdot 2$

$h3(\theta) := 2\cdot d\cdot k\cdot\cos(\theta) - 2\cdot\pi\cdot 3$　　$h4(\theta) := 2\cdot d\cdot k\cdot\cos(\theta) - 2\cdot\pi\cdot 4$

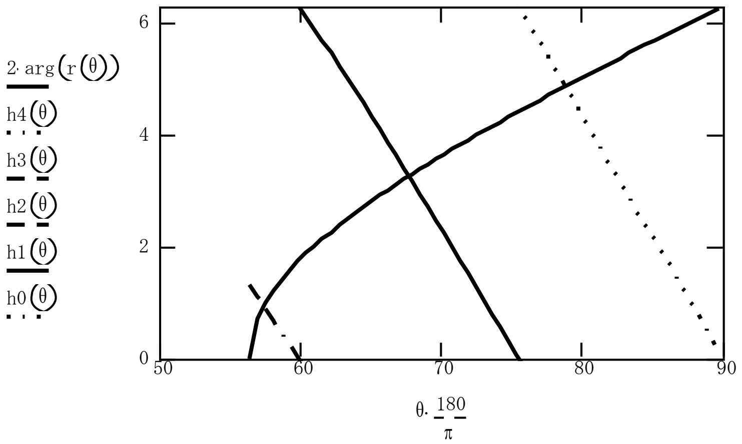
$h5(\theta) := 2\cdot d\cdot k\cdot\cos(\theta) - 2\cdot\pi\cdot 5$　　$h6(\theta) := 2\cdot d\cdot k\cdot\cos(\theta) - 2\cdot\pi\cdot 6$

$h7(\theta) := 2\cdot d\cdot k\cdot\cos(\theta) - 2\cdot\pi\cdot 7$　　$h8(\theta) := 2\cdot d\cdot k\cdot\cos(\theta) - 2\cdot\pi\cdot 8$

両端で全反射する光は、全反射ゆえに位相を変える。s-modeの全反射振幅係数が

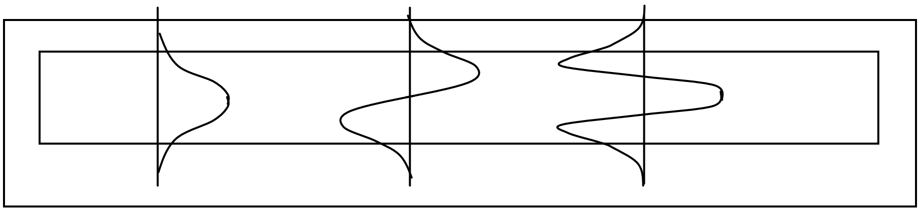
$$r(\theta) := \frac{n\cdot\cos(\theta) + i\cdot\sqrt{(n\cdot\sin(\theta))^2 - 1}}{n\cdot\cos(\theta) + (-i)\cdot\sqrt{(n\cdot\sin(\theta))^2 - 1}}$$

である。このr(θ)の偏角を計算し、それを2倍すると、一往復（2回反射）による位相変化の値が出る。先にえられた直線との交点が、伝播による位相変化と全反射による位相変化と打ち消し合って、定在波をつくる条件を与える。



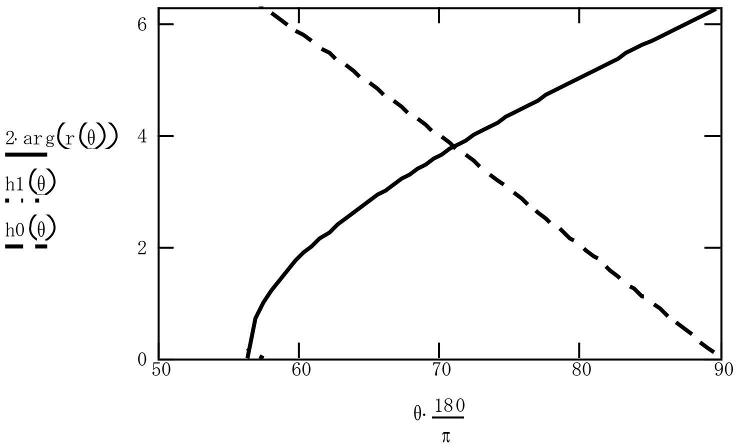
(vi) 3 つのモードが許される。最高次数のモードを超えると，境界面へ入射角が大きくなり，全反射できなくなる。金属導波管の内部の伝播では，誘電体導波路と異なり，全反射条件がないので定在波条件から決まる遮断周波数だけで現象が決まる。

(vii)これは, 幾何光学からは分からないので, 波動光学の知識をもとに推察することになる。



(viii)

$d = 0.93\mu$ にとると，次図のように，TE_1 が「ぎりぎり」で見えている。従って，0.90 ミクロンにとれば単一モードになるだろう。



解析的には，全反射の臨界角θ_c を用いて概算できる。比屈折率が非常に 1 に近いとき(現実の光導波路ではよくあることだが，この問の設定ではあまりよく成り立っていない)，$\delta \equiv n-1$を定義すると$\delta << 1$となる。屈折の臨界角は

$$\sin\theta_c = 1/n = 1/1+\delta \approx 1-\delta$$

である。あるいは

$$\cos\theta_c = \sqrt{1-(1-\delta)^2} \approx \sqrt{2\delta}$$

と近似できる。N= 1 のモードについて

$$2kd\cos\theta_c - 2\pi = 0$$

となる d が求めるもの(上の図を見よ) :

$$d = \pi/(k\cos\theta_c) \approx \pi/k\sqrt{2\delta} = \lambda/2\sqrt{2\delta}$$

本問の値を入れてみると，$\delta = 0.2$ だから，導波路内波長 λ の 0.8 倍程度と計算される。