ガウスビーム　解答1

問１

(A)　　式(2.1)の指数関数をまとめると

$$u(r,z)=\frac{A_0}{w(z)}\exp\left(-\frac{r^2}{w(z)^2}-i\left(kz-\arctan\left(\frac{z}{z_0}\right)+\frac{kr^2}{2R(z)}\right)\right)$$

となる。この式の内容を「原点からの（光軸上の距離）z」に依存する部分と「光軸からの r」に依存する部分を分離して書くと

$$u(r,z)=\frac{A_0}{w}\exp\left[-i\left\{kz+\phi-\frac{\pi}{2}\right\}-r^2\left\{\frac{1}{w^2}+\frac{ik}{2R}\right\}\right]$$

となる。arctan(z/z_0) を ϕ と書き直したが、焦点の前後 z_0 程度の領域で位相が急激に変化する効果をあらわす（Gouy の位相）。 $-\pi/2$ は，$z\to\infty$ のとき arctan(z/z_0) $\to\pi/2$ より，Gouy の位相を示す基準を正の無限遠にとったことに対応する。

題意により，上式から r に依存する部分を抽出し，z が一定となる（光軸に直交する）平面上で信服と位相がどのように変化するかを調べる:

$$u\ \to e^{-r^2\left\{\frac{1}{w^2}+i\frac{k}{2R}\right\}}=e^{-\frac{r^2}{w^2}}\times e^{-i\frac{k}{2R}r^2}$$

である。

最右辺の第一因子 : 光軸からの距離 r が増加すると，振幅がガウス分布（正規分布と同じもの）の形にしたがって減衰し，振幅が r=0 のところの値の 1/e となるのが r=w（光軸から w だけ離れたところ）である。

同じく第二因子 : r の増加とともに位相が変化する。すなわち、光軸と垂直な面内で移動すると、等位相面を次々と横切ることに対応する。(B) で調べるように，等位相面が半径 R の球面であることを反映している。

(B)　$u(r,z)=\frac{A_0}{w}\exp\left[-i\left\{kz+\phi-\frac{\pi}{2}\right\}-r^2\left\{\frac{1}{w^2}+\frac{ik}{2R}\right\}\right]$の中から位相を表す項をくくりだすと、

$$\exp\left[-i\left\{kz+\phi-\frac{\pi}{2}+\frac{kr^2}{2R}\right\}\right]$$

である。この位相項の中から，z および r 依存性をもつ部分

$$\exp\left[-i\left(kz+\frac{kr^2}{2R}\right)\right]$$

をとりだして観察すると、

$$z+\frac{1}{2}\frac{r^2}{R}$$

の値が等しくなる位置の位相が同じであり，その位置をつなげていくと等位相面（すなわち波面）になることがわかる。

- ✓ $f\ z,r\ \equiv z+\frac{1}{2}\frac{r^2}{R}$ とおくと，z 軸上，原点から距離 R の点では $f(R,0)=R$.
- ✓ 点 $(R,\ 0)$ をとおり，$f\ z,r\ =z+\frac{1}{2}\frac{r^2}{R}=f\ R,0\ =R$ を満たす $(z,\ r)$ は，

  $z=R-\frac{1}{2}\frac{r^2}{R}$ という z 軸を回転軸とする回転放物面の上にある.
- ✓ z 軸に非常に近いところ(z≫r)では，この回転放物面を球面と見なすことができる．なぜなら，原点を中心とする半径 R の球面は $z^2+r^2=R^2$ で表せるが，z≫r では、

  $$\sqrt{z^2+r^2}=z\sqrt{1+r^2/z^2}\approx z\left(1+\tfrac{1}{2}\left(r^2/z^2\right)\right)\approx z+\tfrac{1}{2}\left(r^2/z\right)$$

  という近似が成り立つので，$z^2+r^2=R^2$ の関係は

  $$z+\tfrac{1}{2}\tfrac{r^2}{z}=R \quad \rightarrow \quad z=R-\tfrac{1}{2}\tfrac{r^2}{z}$$

  とも書けるが，最終式の右辺において（z≫r だから $z^2+r^2=R^2$ は $z^2\sim R^2$ となり）z を R とおくと，球面の式 $z^2+r^2=R^2$ が回転放物面の式 $z=R-\frac{1}{2}\frac{r^2}{R}$ と近似的に等しくなる.
- ✓ 以上を総合すると，光軸上（r=0）で原点から z の距離にある点を通る波面は、原点を中心にして R=z の曲率半径をもつ球面とみなせる（球面波)。
- ✓ 原点でもっとも絞り込まれた（言いかえると，原点にビームウェストがある）ガウスビームでは、原点から十分に遠いと球面波とみなせる。この光ビームを幾何光学で表すなら原点に点光源があるときの光の広がりを表している。「光源」は光を出すときだが，逆に「平行光を凸レンズで絞り込んだときの焦点が原点になっている」とも言える。

(C)ビームの片側の開き角(のタンジェントあるいはサイン)は，ビームの広がりを原点＝焦点からの距離で割ったものである．実際，その値,

$$\frac{w}{z}=w_0\sqrt{\frac{1}{z^2}+\frac{4}{k^2w_0^4}}\rightarrow\frac{2}{kw_0}=\frac{\lambda}{\pi w_0}$$

を見ると、右辺の結果は「w_0 の開口からの回折」と解釈することができる.

- ✓ もし開口位置における波の強度分布が矩形だと、その空間フーリエ成分は sinc 関数の形になり、サイドローブがあらわれる。
- ✓ しかしガウスビームのように強度分布がガウス形をしていると、そこに含まれる空間フーリエ成分もガウス分布となり、サイドローブなしの形状である。そして広がり角が上で求めた値に一致するはずである。
- ✓ これらの事情は、量子論の不確定性原理を光子にあてはめて、次のように理解しても

よい。平面波(進行方向と直行する方向で無限の広がりを持つ)の光は運動量 $p_{//}=\dfrac{\hbar}{\lambda}$ をもつが、この平面波を 2w_0 の開口をもつスクリーンを通過させると、不確定性原理から、スクリーンにそって $p_{\perp}\approx\dfrac{\hbar}{2w_0}$ 程度までの運動量の分布が発生する。この横成分のために、開口を出たあとの波は広がり、その広がり角は $\Delta\theta\approx p_{\perp}/p_{//}$ 程度になる。

- ✓ レーザー装置からの出力パターンを十分離れたところで(何ヶ所かで)測定すると、ビームの開き角が測定できる。このとき半幅で言うか、全幅で言うかは注意する必要があるが、いずれにしても$\Delta\theta$が分かる。これと波長から w_0 を知ることができる。従って、(ビームウェストの光軸上の位置を知れば)このビームのガウス光学的なパラメータはすべて知られたことになる。

(D)　$w(z)=w_0\sqrt{1+\dfrac{4z^2}{k^2w_0^4}}$ の平方根の中に注目する。 z が$1\approx\dfrac{4z^2}{k^2w_0^4}$ 程度になるまではビーム径の増加が進む距離の 1 次ではなく（非直線的)、幾何光学からのずれが顕著であると言って良いだろう。その位置を超えると、平方根の中の 1 が無視できるようになり、<u>光「線」</u>が広がって行く描像と一致する。

- ✓ 数値例として、波長 1μ でビームウェストが 1mm のとき、$1\approx\dfrac{4z^2}{k^2w_0^4}$ を満たす z の値は数メートルのオーダーになるはず(各自確かめよ)。これよりビームウェスト側では，幾何光学は適用できず，光の波動性を反映しているガウス光学で取り扱わなければいけない。
- ✓ 「波動性が現れるのが焦点付近の波長程度の大きさの空間である」ということが言われることがあるが、いつも正しいわけではないことに注意すべきである。

(E)平行光線を絞り込んだ焦点位置とは、ビーム径がもっとも小さなところである。従って、原点が焦点となっている。原点では R→∞であり、その波面は平面になる。ただし，波面上の強度分布がガウス分布であるため，先に進むと回折効果のために波面が曲がり出し，最終的には同位相面が球面で近似できるようになる。

問 2

(a) レーザーでは、共振器内部で光が何度も反射・往復する。

- ✓ 共振器内に安定に存在するモードの光ほど、利得媒質と長く相互作用し増幅されるから、強い光に成長する。これが，レーザーの(安定)共振器内で「自己再生的」な波面が実現される理由である。
- ✓ 特に、定在波型の共振器では、反射鏡のところで鏡の曲率と同じ波面を持つモードが安定なモードになる。
- ✓ 共振器内のビームウェスト位置では、このモードの波面は光軸と垂直な平面で，その

面上で強度分布が広がりを持っている。

- ✓ その強度分布が、ガウス分布ならば不確定性原理から（空間周波数成分と強度分布の間のフーリエ変換の関係から）横方向のビームの広がり角が最小に押さえられる。共振器の終端の鏡に光があたったとき，ビームの幅が狭いほど鏡の縁から（したがって共振器から）光がもれ出す確率が小さい。
- ✓ こうして、ビームウェスト位置で同程度の広がりをもつビームのうち、ガウス分布をもつものが最も（損失が少いために）発振しやすいモードとなる。
- ✓ これらを総合すると、安定共振器のレーザー出力は，ガウスビームになりやすいことがわかる。

(b) 対称性を考えると、ビームウェストは平面鏡の上にある。w_0=0.5mm、w=1mm、半角＝0.5mrad

問 3

ガウスビームのウェストサイズ w が幾何光学の軸からの距離 r に，また波面の曲率半径 R が（$r' \approx \dfrac{w}{R}$ を通じて）r' に対応している。そこで，実際にガウスビームが真空中を伝播したとき，あるいはレンズを通過したときどのように各パラメータが変化するかを見定める。

(i) レンズを通過するとき（レンズは薄いからスポットサイズ w は変わらないから）

ガウスビームの複素パラメータの定義

$$\frac{1}{q} \equiv \frac{1}{R} - 2\frac{i}{k \cdot w^2}$$

において虚部は不変である。また，焦点距離 f のレンズを通過することにより，平行光線が f 離れた焦点に向かう収束光となることを波面の曲率で言い表すと， $R = \infty \to -f$ である。これを上の式の実部に入れると，レンズの前後で

$$\frac{1}{q_2} = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{f}$$

という変化を起こすことがわかる。これを $q_2 = \dfrac{q_1}{-q_1/f + 1}$ と変形し，$q_2 = \dfrac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D}$ に当てはめると

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix}$$

となる。

(ii) $\dfrac{1}{q} \equiv \dfrac{1}{R} - 2\dfrac{i}{k \cdot w^2}$ から出発しよう。

逆数をとると

$$\frac{1}{\dfrac{1}{R}-\dfrac{2i}{kw^2}}=\frac{\dfrac{1}{R}}{\left(\dfrac{1}{R^2}+\dfrac{4}{k^2w^4}\right)}+\frac{\dfrac{2}{kw^2}}{\left(\dfrac{1}{R^2}+\dfrac{4}{k^2w^4}\right)}\cdot i=Rkw^2\frac{kw^2+2iR}{k^2w^4+4R^2}$$

となる。その実部および虚部は

$$\mathrm{Re}\left[Rkw^2\frac{kw^2+2iR}{k^2w^4+4R^2}\right]=k^2w^4\frac{R}{k^2w^4+4R^2}$$

$$\mathrm{Im}\left[Rkw^2\frac{kw^2+2iR}{k^2w^4+4R^2}\right]=kw^2\frac{2R^2}{k^2w^4+4R^2}$$

である。以上は一般的な式である。

原点にビームウェスト w_0 があって波数 $k=\dfrac{2\pi}{\lambda}$ をもつ「自由空間を伝わるガウスビーム」を考え

$$R(z)=z\cdot\left(1+\frac{k^2w_0^4}{4z^2}\right),\ \ w(z)=w_0\sqrt{1+\frac{4z^2}{k^2w_0^4}}$$

を代入する。そうすると q の実部は

$$\mathrm{Re}\left[Rkw^2\frac{kw^2+2iR}{k^2w^4+4R^2}\right]=k^2w^4\frac{R}{k^2w^4+4R^2}$$

$$=k^2\left(w_0\sqrt{1+\frac{4z^2}{k^2w_0^4}}\right)^4\cdot\frac{z\cdot\left(1+\dfrac{k^2w_0^4}{4z^2}\right)}{k^2\cdot\left(w_0\sqrt{1+\dfrac{4z^2}{k^2w_0^4}}\right)^4+4z^2\left(1+\dfrac{k^2w_0^4}{4z^2}\right)^2}$$

$$=z$$

同じく q の虚部は

$$\mathrm{Im}\left[Rkw^2\frac{kw^2+2iR}{k^2w^4+4R^2}\right]=kw^2\frac{2R^2}{k^2w^4+4R^2}$$

$$=\frac{kw_0^2}{2}$$

こうして，自由空間を z だけ進むことで $q_{\mathrm{i}}\to q_{\mathrm{o}}$ となったときには

$$\mathrm{Re}[q_2]=\mathrm{Re}[q_1]+z$$

$$\mathrm{Im}[q_2]=\mathrm{Im}[q_1]=\frac{kw_0^2}{2}$$

となることがわかった。すなわち

$$q_2 = q_1 + z$$

である。これを

$$q_2 = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D}$$

の式にあてはめると，$A = 1, B = z, C = 0, D = 1$ であり

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

となっている。

問 4

ビームウェストの位置では波面が平面だから R = ∞よって 1/q の実部が 0、また w_0 が与えられており

$$\frac{1}{q_0} = -\frac{2i}{kw_0^2}$$

である。もちろん、k=2π/λである。これをレンズで変換すると、$q_1 = \dfrac{q_0}{-q_0/f + 1}$ あるいは $\dfrac{1}{q_1} = \dfrac{1}{q_0} - \dfrac{1}{f}$ だから

$$\frac{1}{q_1} = \frac{1}{-f} - \frac{2i}{kw_0^2}$$

である。このパラメータをもつビームが自由空間を伝播し再び純虚数になるときが、新しいビームウェストの位置である。$z_0 \equiv \dfrac{kw_0^2}{2}$ なる定数を導入しよう。q の逆数をとると

$$q_1 = \frac{1}{-\dfrac{1}{f} - \dfrac{2i}{kw_0^2}} = -f \cdot kw_0^2 \frac{kw_0^2 - 2i \cdot f}{k^2 w_0^4 + 4f^2} = -f \cdot z_0 \frac{z_0 - i \cdot f}{z_0^2 + f^2}$$

だから，その実部を書くと

$$\mathrm{Re}[q_1] = -f \frac{k^2 w_0{}^4}{k^2 w_0^4 + 4f^2} = -f \frac{z_0{}^2}{z_0^2 + f^2} = \frac{-f}{1 + \left(\dfrac{f}{z_0}\right)^2}$$

である。よって，自由空間を $\left|\mathrm{Re}[q_1]\right|$ だけ進んだ位置ではビームパラメタの実部が 0 となりこれが新たなビームウェストである。

この新たなビームウェストの位置では

$$q_2 = q_1 + \left|\mathrm{Re}[q_1]\right| = i \times \mathrm{Im}[q_1] = i\frac{f^2 \cdot z_0}{z_0^2 + f^2}$$

である。よって

$$\frac{1}{q_2} = -i\frac{z_0^2 + f^2}{f^2 z_0} = -\frac{2i}{kw_0'^2}$$

の関係によって新たなスポットサイズ w_0' を求めると

$$\left(w_0'\right)^2 = \frac{2z_0 f^2}{k\cdot\left(z_0^2 + f^2\right)} = \frac{2z_0}{k\cdot\left(1+\dfrac{z_0^2}{f^2}\right)} = \frac{\left(w_0\right)^2}{\left(1+\dfrac{z_0^2}{f^2}\right)} \quad \rightarrow \quad w_0' = \frac{w_0}{\sqrt{1+\dfrac{z_0^2}{f^2}}}$$

である。分母は必ず１より大きい。平行ビームをレンズでしぼって出来た焦点の位置に別のレンズをおくと，ビームはさらにしぼられ，もとのスポットサイズより小さくなる。

$z_0 = \dfrac{kw_0^2}{2} = \pi w_0 \cdot \left(\dfrac{w_0}{\lambda}\right)$が，もともとのビームウェストのスポットサイズに，それと波長の比をかけた程度（π は度外視した）の量であることに注意せよ。

もちろん、幾何光学では，焦点の位置ではスポットサイズがゼロだから、このような取り扱いはできない。

(ii) 波長 0.7μ mの光が焦点（ビームウェスト）でスポットサイズ１μ mなら、そのガウスビームの様子は（したがってその前後の様子も）完全に決まってしまう。ビームウェストでは

$$\lambda = 0.8\times10^{-6}\,\mathrm{m}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 7.854\times10^{6}\,\mathrm{m}^{-1}$$

$$w_0 = 0.5\times10^{-6}\,\mathrm{m}$$

$$q_0 = -\frac{kw_0^2}{2i}$$

である。このビームは d=5mm＝$5\times10^{-3}\,\mathrm{m}$ 手前でレンズを通過した。レンズ通過直後のビームパラメータは，自由空間を焦点位置から逆戻りさせて求めることができる。すなわち $q_0 + d$ を計算し，その逆数をとり，虚部を求めると，レンズ通過直後のスポットサイズが得られる。このスポットサイズをカバーするレンズの大きさを考えるのが題意である。

$$\mathrm{Im}\left[\frac{1}{q_0 + d}\right] = -\frac{2}{kw_0^2}$$

より

$$w_0=\frac{1}{\sqrt{-k\dfrac{\mathrm{Im}\left[\dfrac{1}{q_0+d}\right]}{2}}}=2\ .\ 5{\times}4\ 6^{-3}\ 1$$

となり，半径 2mm ないし 3mm のレンズが必要なことが分かる。（レンズの口径というときは，直径で表すから 5～6mm といえばよいだろう。）

（iii）レンズ直後のビームパラメータから出発したほうがわかりやすいだろう。

$$w_1=2.546\times10^{-3}\mathrm{m}$$
$$R_1=-5\times10^{-3}\mathrm{m}$$

より

$$q_1=\left(\frac{1}{R_1}-\frac{2i}{kw_1^2}\right)^{-1}$$

である。スポットサイズは(ii)の値を用いた。波面の曲率半径は，レンズで絞られた光が 5mm 先に向かって絞られることから値を出した。このビームが空気中（屈折率 1 とする）を 1mm 進むと

$$q_2=q_1+1\times10^{-3}$$

となる。その後に屈折率 1.5 の誘電体（境界は平面）に入射すると

$$q_3=\frac{q_2}{\left(\dfrac{1}{n}\right)}$$

となる。よって

$$\mathrm{Re}\left[q_3\right]\approx-6\times10^{-3}\mathrm{m}{=}6\mathrm{mm}$$

が境界面からあらたな焦点位置までの距離である。その焦点位置でのビームパラメータは

$$q_4=q_3+\mathrm{Re}[-q_3]=i\times\mathrm{Im}\left[q_3\right]$$
$$\mathrm{Im}\left[\frac{1}{q_4}\right]=-6.788\times10^{5}$$

この結果を用いて，あらたなビームウェストにおけるスポットサイズを求めるのだが，屈折率 1.5 の媒質中では波長が 1/1.5 になるので，波数 k が 1.5 倍になることに注意する。

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{-\mathrm{Im}\left[\frac{1}{q_4}\right]}{2}n\cdot k}} \approx 5.001\times10^{-7}\ \mathrm{m} = 0.5\times10^{-6}\ \mathrm{m}$$

となり，スポットサイズは実質的には変わらないことがわかった。