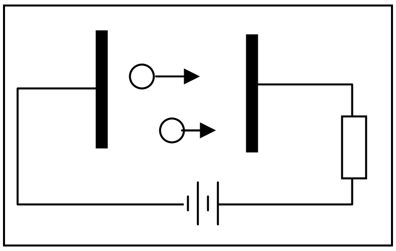
8.ノイズ：



ショットノイズ

信号の担い手が電子のように粒子性をもつとき、統計的平均としては毎秒同じ数の粒子が来ていても、時間的にはゆらぎ(fluctuation)がある。短い観測時間内では信号粒子が 1 個も来ないときもある。（信号を音で表すと、傘に当たる雨の音のように聞こえる。）これをショットノイズという。後で学ぶ光電子増倍管(光電効果と 2 次電子放出による電子流を用いる)、光伝導素子（半導体中の電子正孔対生成によるキャリヤ流を用いる）、フォトダイオード(p-n 接合のところで生成されるキャリヤ流を用いる)、アバランシュ・フォトダイオード(フォトダイオードに雪崩効果による増幅を加える)などで、ショットノイズは重要である。次に述べる熱雑音は温度を下げれば小さくなるが、ショットノイズは消えない。信号量が多いときショットノイズによる S/N(信号パワーとノイズパワーの比)は良くなる。ショットノイズは、信号と切り離して独立に取り去ることができない点が重要である。信号強度が弱く粒子性が顕著な場合には、計数（カウンティング）を行う方法が一般に行なわれるが、この場合は粒子数のゆらぎを直接に（粒子数として）観測するわけで、十分な数の計数を行なわないと統計誤差が出ることになる。しかし長時間平均をとることは、とりもなおさず、観測のバンド幅を狭めたことでありそのままでは高速性と相反する。コヒーレントな光を局部発振に使ってヘテロダイン検波することで、実効的に信号量をふやし、ショットノイズから逃れることができる。

ショットノイズの性格を理解するため、図のように一方の電極（カソード）から電子がランダムに放出されて他の電極に入る場合を考える。このときはプレート電流のゆらぎはカソードからとび出す電子数のゆらぎにほかならない。いま時間を τ 秒間ごとに区切って観測し、ある一区切りの中にカソードを出る電子の数を N とする。どの区切りで観測するかによって、N は(たくさんの区切りにわたる)平均値 $\langle N \rangle$ より大きいことも小さいこともある。そこで $\delta N = N - \langle N \rangle$ とおき、ゆらぎの大きさを表わすのに $(\delta N)^2$ の平均値を使う。この電子放出過程が、電子同士は互いに無関係に一定の確率でとび出すものとしよう。1 個の電子が飛び出す確率は小さく、「少数の法則」に従うとするので、統計学によって $\langle (\delta N)^2 \rangle = \langle N \rangle$ となることが知られている（単位時間内に観測される粒子数の頻度分布がポアソン分布となる）。注目する区切りの内で、τ 秒間の電流は $I = eN/\tau$ と書ける。電流の平均値を求めると $\langle I \rangle = e\langle N \rangle/\tau$ となる。一方、電流の揺らぎの程度は、

$$\left\langle (I - \langle I \rangle)^2 \right\rangle = \left(\frac{e}{\tau}\right)^2 \left\langle (N - \langle N \rangle)^2 \right\rangle = \left(\frac{e}{\tau}\right)^2 \left\langle (\delta N)^2 \right\rangle = \left(\frac{e}{\tau}\right)^2 \langle N \rangle = \left(\frac{e}{\tau}\right)\langle I \rangle$$

で見積もられる。つまり、電流の揺らぎの程度は $\sqrt{(e/\tau)\langle I \rangle}$ に比例する。従って S/N（信号雑音の電力比のことで、エス・エヌと呼ぶ）は I に比例して良くなる。信号を担う 1 個の電荷が小さければ、(逆に同一の電流に対して粒子数が多いのだから､）それに比例して S/N が良くなる。

一般に電子回路では、取り扱える周波数範囲が限られているので、時間 τ のかわりに周波数帯で雑音を表わした方が現実的だろう。まず、I は電流の瞬時値を τ 秒間で平均した値であることを思い出す。つまり、τ 秒ごとに一定値が切り替わるような出力波形を考えていることに対応する。このような波形を再現するための周波数成分には半周期が τ よりも短いものは含まれない。いいかえると、τ 秒間ずつに区切って平均することと、周波数が $\Delta f = 1/(2\tau)$ 以下の成分だけをとることとは同じである。そこで先に見積もった「τ 内の電流の揺らぎ」$\left\langle \left(I - \langle I \rangle\right)^2 \right\rangle = \left(\dfrac{e}{\tau}\right)\langle I \rangle$ を、「周波数(サイクル/秒)が Δf の範囲に入る揺らぎの全電流の揺らぎ」と思い直し $\dfrac{1}{\tau}$ に $2\Delta f$ を代入して $\langle i^2 \rangle = e\langle I \rangle 2\Delta f$ と書き直す。

個々の電子が非常に短いパルス電流パルスを作るなら、その周波数成分は非常に大きく広がっているため、周波数 f と $f + \Delta f$ の間の雑音に対しても

$$\underline{\langle i^2 \rangle = 2e\langle I \rangle \Delta f} \quad \text{あるいは} \quad \underline{i_{\text{rms}} \equiv \sqrt{\langle i^2 \rangle} = \sqrt{2e\langle I \rangle \Delta f}} \quad \text{あるいは} \quad \underline{S/N = \frac{\langle I \rangle^2}{{i_{\text{rms}}}^2} = \frac{\langle I \rangle}{2e\Delta f}}$$

によってショットノイズの見積もりが与えられる。

実験観測するとき、観測時間内に得られる信号粒子数が N なら、$N^{1/2}$ 程度は誤差(ゆらぎ)があるかどうかをみて、現象がランダムに起きているかどうか判断をすることがよくある。たとえば、1 秒に平均 10^4 カウントを計数するとき、試行ごとに 100 カウント程度ばらつくなら、ランダムな現象であると考える。上の式 $i_{\text{rms}} = \sqrt{\langle i^2 \rangle} = \sqrt{2e\langle I \rangle \Delta f}$ の両辺を $2\Delta f$ でわる、つまり観測時間をかけると $\langle I \rangle$ の平方根に比例するから、まさにその関係が現れている。確率分布を参照：ポアッソン分布、ガウス（＝正規）分布、2 項分布)

問１．電流を運ぶ粒子が電子であるとし、1 pA の信号電流に対して信号雑音（電力）比で S/N=100 を要求するなら、検出系の応答速度はどこまで上げることができるだろうか。300MH z の応答速度で検出を行うには、どの程度の信号電流が必要となるだろうか。

ジョンソンノイズ

発光・受光素子を動作させる回路には必ず電気抵抗があり、回路中の電子の熱運動による熱雑音電圧が抵抗の両端に現れ信号検出を妨げる。熱雑音、ジョンソン(Jonson)ノイズ、ナイキスト(Nyquist)ノイズなどと呼ぶものがこれである（これらは同じもの)。１つの抵抗を考えると、全体では正負の電荷量がつりあって電気的に中性だが、キャリヤが熱運動をするため局部的に密度に揺らぎが生じ、その結果として両端に雑音電圧が発生する。これに第 2 の抵抗を接続すると、その雑音電圧のために電流が流れ、第 2 の抵抗に電力が供給されたことになる。ある周波数で供給された電力パワーは、その周波数でエネルギーを放出する電気的な振動子から来ると考えて良い。1 個の調和振動子が熱平衡状態にあるとき、その全エネルギーの平均値が kT である。k はボルツマン定数、T は絶対温度である。以上の議

論から、観測のバンド幅をΔf　とし、抵抗Rを流れる電流ノイズiのパワーを

$$\text{パワー}=R\cdot i^2 = kT\cdot(2\Delta f)$$

とすれば

$$i=\sqrt{\frac{2kT}{R}\Delta f}$$

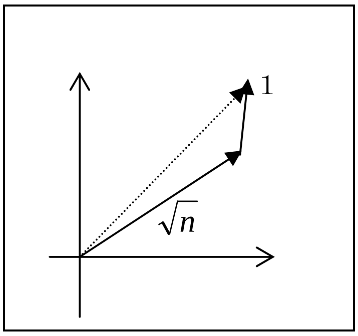
を得る。より正確には、ノイズ電流の自己相関、つまりパワースペクトルをもとめると

$$i=\sqrt{\frac{4kT}{R}\Delta f}$$

が熱的揺らぎによる電流の実効値であることが言える。

問２．　R=1kΩ、バンド幅 5MHz、T＝290K とすると、ノイズ電圧の実効値はどれほどか。

レーザー発振器とノイズ



　　　レーザー発振器からの光には、さまざまな理由でノイズが入る。共振器構造が不安定であったり、励起が不安定であったりすれば、もちろんその影響がレーザー光の振幅や位相のゆらぎとなる。また、多モード発振でモード間の位相が同期しないための不安定性もあるし、時間的に異なるモードの間をジャンプする場合もある。発振している光が外部からもどって共振器に再度注入されるための不安定発振（戻り光雑音）など、発振のゆらぎを与える可能性をあげればきりがない。しかし、これらの理由が取り除けても、根源的に残るノイズの原因がある。それが自然放出光の存在である。自然放出が種になったレーザー発振が起きるのだから、自然放出がなければレーザーは発振しない。ところが、発振しているレーザー光に別の自然放出光が加わると、全体としての位相や振幅がゆらぐことになる。

　　　図は、ある時刻に共振器中のレーザー光子数が n であったとし、レーザーモード内に自然放出が起きた（自然放出で出現した光子がランダムな位相で１個付け加わった）状態を示す複素電場振幅のフェーザーである。自然放出にともなう位相変化がどの程度の頻度で起きるかを見れば、自然放出によるレーザー発振のノイズについて見積もりができる。

　　　図から推察できるように、１回の自然放出によって起きる位相変化は、自然放出光の振幅をレーザー光の振幅で割った程度である。これは、共振器内で自然放出光が持つエネルギー密度とレーザー光のそれとの比の平方根に一致する：レーザーモードの光子数を n として（光電場の振幅は光エネルギー密度の平方根に比例することを考えると）

$$\Delta\theta \approx \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

と表せる。

　　　自然放出が起きる頻度は発振のしきい値条件から決まる。しきい値条件においては、共振器内のすべての光は自然放出光であるが、この光は励起状態の物質から放出されて共振器外に逃げ出す（物

質による吸収も含む)。この「放出」と「逃げ出しおよび吸収」の過程が均衡している。より正確には、自然放出光がレーザー発振のモードに放出する単位時間あたりの光子数と、このモードから逃げ出す光子数が均衡している。(1個の励起状態の原子からの自然放出のレートが一定でも、励起原子の個数が多くなればそれに比例してこのモードに投入される自然放出光のレートが増加することに注意。) レーザー共振器の光子寿命を(反射鏡の反射率を設定して)定めると、これがしきい値条件における自然放出寿命と一致する。

ひきつづき、しきい値条件で考える。ある時間T(この大きさはあとから決める)の間に$\dfrac{T}{t_{\mathrm{c}}}$回の自然放出がおきると、そのたびに位相がランダムな変化をする。そうすると、(ランダムウォークによる到達位置の分布を考えると分かるように)T内での位相の変動は累積すると$\dfrac{T}{t_{\mathrm{c}}}$回の平方根に比例し

$$\Delta\phi \approx \Delta\theta \times \sqrt{\frac{T}{t_c}}$$

程度になる。

一般に位相を時間微分すると周波数となる。複素振幅$e^{i(\omega_0 t+\phi)}$の位相項$\omega_0 t+\phi$に注目し、$\omega_0 t+\phi=\omega t$と書き直すと、$\omega=\omega_0+\dfrac{\phi}{t}$である。$T$の間に生じる位相累積変動$\Delta\theta$と周波数変動$\Delta\omega$の関係は

$$\Delta\omega = \frac{\Delta\,\theta}{T}$$

となり

$$\Delta\omega = \frac{1}{T}\Delta\theta\sqrt{\frac{T}{t_c}} = \frac{\Delta\theta}{\sqrt{Tt_c}} = \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{Tt_c}}$$

である。

次に、レーザー発振している共振器内の光子密度をみつもる。共振器内にある光子数をnとしよう。この光子は共振器の光子寿命t_cの間に外部に逃げ去り、それがレーザー出力Pとなる。すなわち

$$P = n\frac{h\nu_0}{t_c}$$

Pが測定できれば$h\nu_0$で割って光子束の強度(個/秒)が得られる。hはプランク定数。逆に、その値をt_c倍すると共振器内の光子数になる:

$$n = \frac{Pt_{\mathrm{c}}}{h\nu_0}$$

である。

レーザーが定常的に発振しているとき、励起されている原子数はしきい値条件のときと同じである。したがって、レーザー発振中の自然放出レートもしきい値条件と同じになる。先に求めた周波数

変動$\Delta\omega=\dfrac{1}{\sqrt{n}\sqrt{Tt_c}}$の式に含まれる光子数を、パワー$P$を用いて書き換えると

$$\Delta\omega=\frac{1}{\sqrt{nTt_c}}=\frac{1}{\sqrt{\dfrac{Pt_c}{h\nu_0}Tt_c}}=\frac{\sqrt{h\nu_0}}{\sqrt{Pt_c^2T}}$$

となる。

位相の累積変動を観測する時間Tとしては何をとるのが適切かを考える：レーザーの発振周波数の幅Δν＝$\dfrac{\Delta\omega}{2\pi}$を論じているのだから、周波数測定の精度もΔν程度は必要である。そのためにはΔνの逆数程度の観測時間をとる必要がある。こうして、$T=\dfrac{1}{2\pi\Delta\nu}$としてよいように思われる。この議論の仕方は、少々強引ではあるが、線幅の下限を見積もるには許されるだろうと思う。(振幅の相関が持続する様子を寿命がTの指数関数$e^{-t/T}$であらわせば、スペクトル線は$\displaystyle\int_0^\infty e^{i\omega_0 t-t/T}e^{-i\omega t}dt=\frac{\frac{1}{T}-i(\omega-\omega_0)}{\left(\frac{1}{T}\right)^2+(\omega-\omega_0)^2}$となり、幅が$\Delta\omega=2\pi\Delta\nu\approx\dfrac{1}{T}$程度のローレンツ型曲線となる)。

共振器内の光子寿命t_cを、共振器の共鳴線幅（ファブリペローのモードの幅）$\Delta\nu_{1/2}$に読み変え$\dfrac{1}{t_c}=2\pi\Delta\nu_{1/2}$と書き直す。

上式の両辺を２乗して

$$(\Delta\omega)^2=(2\pi\Delta\nu)^2=\frac{h\nu_0}{Pt_c^2T}=\frac{h\nu_0}{PT}(2\pi\Delta\nu_{1/2})^2$$

よって

$$(\Delta\nu)^2=\frac{h\nu_0}{PT}(\Delta\nu_{1/2})^2=2\pi\Delta\nu\frac{h\nu_0}{P}(\Delta\nu_{1/2})^2$$

Δνについて整理すると

$$\Delta\nu=2\pi\frac{h\nu_0(\Delta\nu_{1/2})^2}{P}$$

となる。(もう少し厳密に考えると、レーザー上準位の分布数と反転分布数の比が$\mu=N_2/(N_2-N_1)$であるとして、レーザーの発振線幅は$\Delta\nu_{laser}=\dfrac{2\pi h\nu_0(\Delta\nu_{1/2})^2\mu}{P}$であることが知られている。)

問3.　He-Neレーザーが4.7×10^{14}Hzで発振している。パワーは1mW。共振器長が1m、出力用カップリングミラーの反射率が99%としエンドミラーは全反射とする。それ以外の損失がないとすると、$t_c=6\times10^{-7}$ s 程度になることを確認せよ。共振器内で屈折率を１とせよ。レーザー遷移の

下準位の分布は無視できる($\mu=1$)として発振線幅の下限を見積もれ。半導体レーザーが3.5 x 10^{14}Hz、3mWで発振している。共振器長300μm、n=3.5、μ=3のとき、発振線幅は？

スクイージング

（光がコヒーレントであると仮定できるのは、十分たくさんの光子を用意できるときである(コヒーレント状態)。コヒーレントすなわち波としての位相が確定できるためには、粒子数が揺らいで無限の粒子数を必要とする。一つのモードに十分多数の光子をつぎこめるレーザーならば、かなりコヒーレントな光を作ることができる。どのような方法で見るにせよ、信号光をどこまで弱くするとノイズに邪魔されて通信が妨害されるか。どんな雑音なら取り除け、どんな雑音が取り除けないのかが問題に成る。モードあたりの光子数が減ると、各モードに放出される真空の揺らぎが顕著となり(全パワーが大きくても、たとえば懐中電灯などではこの例になることは注意に値する)、光の量子性があらわになる。仮に検出器以降のシステムに全くノイズがなかったとしても、信号には光の量子性による揺らぎが現れる(数、従って振幅を決めると、位相が決まらない：振幅変調のときの限界。位相を決めると振幅が決まらない：周波数変調のときの限界。)。粒子数と位相の間の不確定性関係は不可避だが、いずれか一方を押さえこむことならできる（スクイージングという)。もっともこのような極限に到達する以前に、検出系の雑音が大きくてこれらの揺らぎが見えないなら、エレクトロニクスの方の努力が足りないということになる。光検出器および増幅系のノイズが十分にとりさられたかどうかは、たとえばバッテリーノイズがない状態で懐中電灯を点灯し、そのパワーだけを観測したときに光の量子性によるノイズが見えるかどうかが、目安になる。

参考 (i)で求めたエネルギーは，時間領域での積分で与えられた。しかし、時間的に変化する信号波形を周波数成分で表示し、そこから電力スペクトルをもとめ、(時間軸上の積分ではなく)周波数領域での積分を行っても同じエネルギーの値が求まるはずである。実際、電流の時間波形を I(t)とすると、フーリエ変換によって $I(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}F(\nu)e^{i2\pi\nu t}d\nu$ の形で結ばれる F がその周波数成分である。電流パルスが十分短いとすると、$I^2(t)$を T の間積分すれば、その中に全エネルギーが入るはずである(T→∞と同等)。実際,

$$R\int_{-\infty}^{+\infty}|I|^2(t)dt=R\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}F(\nu)e^{i2\pi\nu t}d\nu\right]\left[\int_{-\infty}^{+\infty}F(\nu')e^{i2\pi\nu t}d\nu'\right]^*dt=R\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\nu)|^2d\nu$$

となるから、これが数学的に表現できたわけである。ただし、Dirac の δ 関数、

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i2\pi(\nu-\nu')t}dt=\delta(\nu-\nu'),\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\nu-\nu')g(\nu')d\nu'=g(\nu)$$

を用いた。もちろん、電力スペクトル密度は $S(\nu)=R|F(\nu)|^2$ である。

電圧波形（実数値）v(t)とそのフーリエ変換 V(ω)は

$$V(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}v(t)e^{-i\omega t}dt \quad \text{および} \quad v(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}V(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

で結び付けられている。表示を角周波数ω＝2πfから周波数 fに移すと、$2\pi V(\omega)=\tilde{V}(f)$

$$\tilde{V}(f)=\int_{-\infty}^{+\infty}v(t)e^{-i2\pi ft}dt \quad \text{および} \quad v(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{V}(f)e^{i2\pi ft}df$$

である。