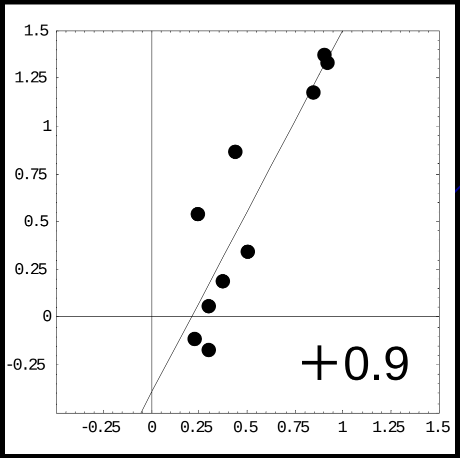
相関関数

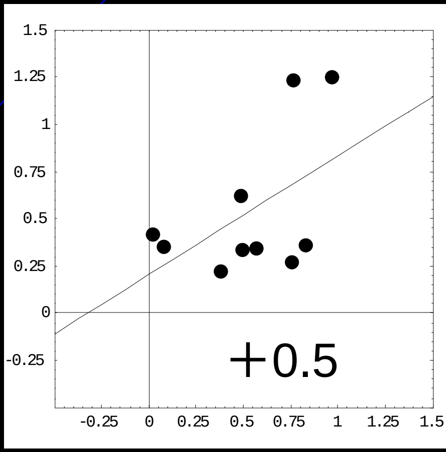
不規則な時系列信号の処理
統計的な規則を見出す方法

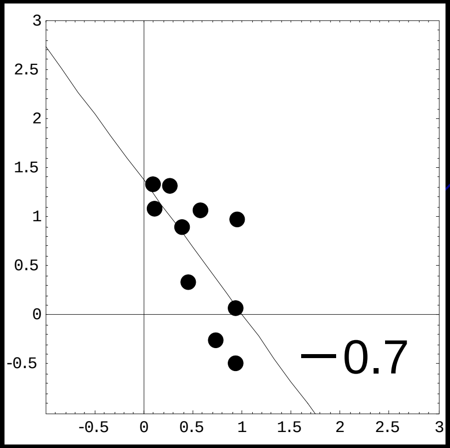
相関係数

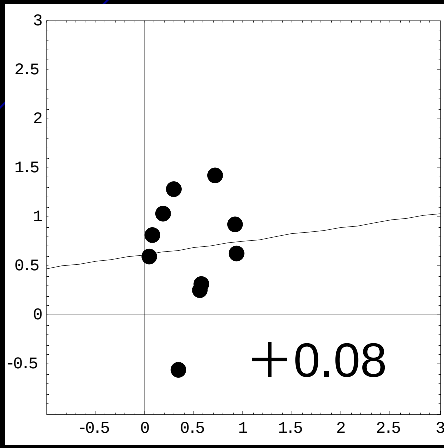
- データ:$\{x_i, y_i\}$
- 相関係数 ρ :
  - 1 完全相関
  - 0 無相関

$$\rho = \frac{\overline{\left(x_i - \overline{m}_x\right)\left(y_i - \overline{m}_y\right)}}{\sigma_x \sigma_y}$$









自己相関関数（1）

- 時系列信号の相関
  - ランダムでない場合にも有意義
  - 時間が経過するに従って前の波形との関連性が薄れる様子
  - Rは偶関数
  - τ ＝0: で最大
    - 平均パワー

$$R(\tau) = \lim_{T \to \infty} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) x(t-\tau) dt$$

自己相関関数（2）

信号が1個のサイン関数　→　自己相関関数はコサイン関数

$$v(t) = V_0 \sin(\omega t - \phi)$$

$$R(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} V_0 \sin(\omega t - \phi) V_0 \sin(\omega(t-\tau) - \phi)\,dt$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \left[\int_{-T/2}^{T/2} V_0 \sin(\omega t - \phi) V_0 \sin(\omega t - \phi)\,dt \times \cos(\omega\tau) \right.$$

$$\left. + \int_{-T/2}^{T/2} V_0 \sin(\omega t - \phi) V_0 \cos(\omega t - \phi)\,dt \times \sin(\omega\tau) \right]$$

$$= V_0^2 \cos(\omega\tau) \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sin^2(\omega t - \phi)\,dt$$

$$= \frac{V_0^2}{2} \cos(\omega\tau)$$

自己相関関数(3)

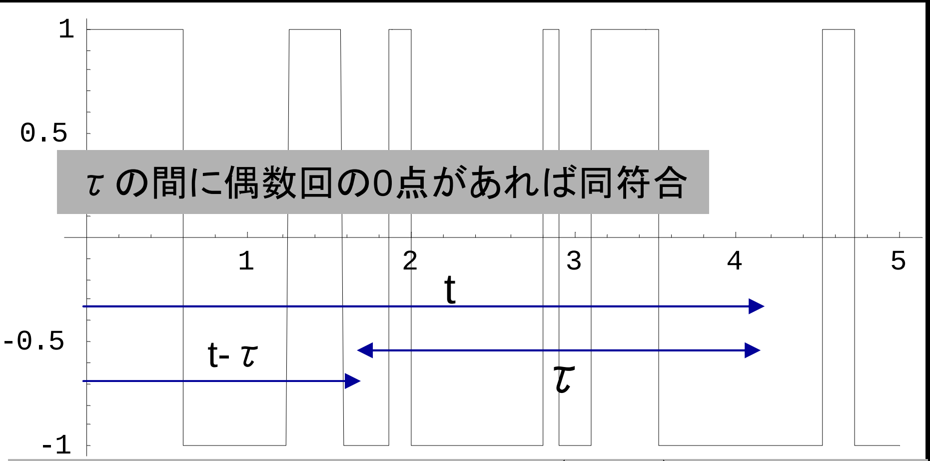
$$R(\tau)=\lim \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t-\tau)dt$$

1. 幅が不規則に変動する矩形パルス
2. 時間T内に0をよぎる回数mが
   ポアソン分布 P_mに従う

3. τの間に±Vの間を振動する回数
   (0点の数)が
   偶数のとき　x(t)x(t- τ)＝＋V^2
   奇数のとき　x(t)x(t- τ)＝－V^2

4. R(τ):幅 τ を一定にし、その位置(t)を変えると、τ の「窓」の中に入る0点の数が変化する。

5. 幅 τ の間に入る0点の数が
   偶数となる確率　$P_0 + P_2 + P_4 +$
   奇数となる確率　$P_1 + P_3 + P_5 +$



$$\begin{aligned}
R(\tau) &= \sum_{m=even} V^2 P_m + \sum_{m=odd}\left(-V^2\right)P_m \\
&= V^2\left(\sum_{m=even}\frac{\overline{m}^m}{m!}e^{-\overline{m}} - \sum_{m=odd}\frac{\overline{m}^m}{m!}e^{-\overline{m}}\right) \\
&= V^2 e^{-\overline{m}}\left(1-\overline{m}+\frac{\overline{m}^2}{2!}-\frac{\overline{m}^3}{3!}+\frac{\overline{m}^4}{4!}+\right) \\
&= V^2 e^{-\overline{m}} e^{-\overline{m}} = V^2 e^{-2\overline{m}}
\end{aligned}$$

パワースペクトル密度

$$FT\left[x(t)\right] = X(\omega)$$

$$FT\left[R(\tau)\right] = X(\omega)^2 \equiv S(\omega)$$

平均パワー：$P_{av} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)d\omega$

ホワイトノイズ

- 自己相関関数　R(τ)　がδ関数

↓

フーリエ変換

↓

- パワースペクトルが　フラット

- 帯域を制限

　ウィンドウ関数のフーリエ変換

熱雑音

- 有限長の導線内の電流
  - 定在波の振動モード
  - 等分配則(熱平衡)により電力供給
  - 高温近似
- 回路を冷やさないと消えない

$$\frac{\overline{v^2}}{R} = 4kT\Delta f$$

$$k = 1.4 \times 10^{-23}\,\mathrm{J/K}$$

Δf : 帯域

抵抗値によらず

$P = kTB$（ワット）

ショット雑音

- 離散量（電子、光子）による信号

- 非常に短い時間幅の中に電子が到着する確率：ポアソン分布

ショット雑音がつくる電流

$$i = \sqrt{2eI\Delta f}$$

Iは信号の平均電流

光検出のときの雑音

- レーザー光の雑音
  - 「完全な」CW発振の条件をつくっても
    蛍光（自然放出）混入→光パワーを増す
- 微弱光
  - 光子（離散）によるショット雑音
  - 電磁場の不確定性（振幅と位相）
  - 真空のゆらぎ