ダランベールの判定法（級数の収束判定）

狩野

用語

数列	$\{a_n\}$
部分和	$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_n$
無限級数	$S = \lim_{n\to\infty} S_n$
正項級数	$a_n > 0$

正級数が収束する条件

$\lim a_n = 0$ でなければ無限級数が収束しないことは明らかである。だが、数列の極限が 0 だからといって、無限に項を加えるのだから、和が収束するとはかぎらない。

正項級数の収束は「比」から判定できる

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$ であるとしよう.

- $r < 1$ ならば級数 $S = \sum_{k=1}^{\infty} a_n$ は収束する
- $r > 1$ ならば級数 S は発散する
- $r = 1$ のときは判定不能である

その心は：

この数列のある項より先では、隣合う項の比が「ほとんど」$\frac{a_{n+1}}{a_n} = r$ となっているはずである（具体的にどの項からそういえるかは数列の様子に依存する）。数列がどのように変化していようと、この項までの部分和は有限であり、この項から先の無限級数は等比級数だと思ってよい。そこで（恐ろしい）無限の議論は等比級数の収束判定にゆだねることができる。

証明：

［$r < 1$ のとき］ r と 1 の間の数 r' を考えると $\varepsilon = r' - r > 0$ である。$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$ より、十分大きな N をとれば、$n > N$ なるすべての n について、a_{n+1}/a_n は r を中心とする幅 ε の範囲に入るはずである。とくに

$$^{\forall} n >^{\exists} N \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < r + \varepsilon = r'(<1)$$

となる。したがって

$$\begin{aligned}
&a_{N+1} < r' a_N \\
&a_{N+2} < r' a_{N+1} < r'^2 a_N \\
&\qquad\vdots \\
&a_{N+m} < r' a_{N+m-1} < r'^m a_N
\end{aligned}$$

これらの不等式から、数列 $\{a_n\}$ は第 N 項より先が公比 $r(<1)$ の等比数列より早く 0 に近づくことが分かる。

もっと正確に言うと次のようになる。無限級数 $\sum c_n$ を考える。ただしその最初の N 項は $c_n = a_n$ であり、それより先の項は $c_{N+1} = r' a_N, c_{N+2} = r'^2 a_N$ などとすると、$a_n \le c_n, n = 1,2,\cdots,N,\cdots$ であり

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} c_k &= a_1 + a_2 + \ldots + a_{N-1} \\
&\qquad + a_N \left(1 + r' + r'^2 + \ldots\right) \\
&= a_1 + a_2 + \ldots + a_{N-1} + a_N \frac{1}{1-r'} \\
&= \text{有限の値}
\end{aligned}$$

となる。一方 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_n$ は $a_n > 0$ より単調増加し、さらに $S_n \le \sum_{k=1}^{n} c_k$。右辺は収束するので、$S_n$ も収束する。

[$r>1$のとき]　あるMより先の項では

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}>1$すなわち$a_M<a_{M+1}<a_{M+2}<\cdots$

となる。こうして、数列は０に収束しないので級数も収束しない。

[$r=1$のとき]　例として次の２つの級数を考察しよう。

１）$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$

２）$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

隣合う項の比は

１）$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{1/(n+1)}{1/n}=\dfrac{n}{n+1}\to 1$

２）$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{1/(n+1)^2}{1/n^2}=\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^2\to 1$

である。しかし

１）は発散する（教科書１７６ページ例３）。

２）は収束する（１７９ページ例題 7.4）