気柱の共鳴

音速

- 縦波の波動方程式を導く
  - 気柱の薄い部分の運動方程式
    - 力：　両側の圧力差⇒圧力勾配
      ⇒　変位の位置に関する2階微分係数
    - 加速度：　変位の時間に関する2階微分係数
  - 圧力と変位の関係
    - 体積弾性率
      - バネ定数から，バネの長さと断面積に依存する部分を取り去る

バネ定数と体積弾性率

フックの法則: $F = -kx$

$k\frac{L}{S}$: バネの材料（構造：板バネ，つる巻バネ，etc
を含む ）の特色

$$k\frac{L}{S} = -\frac{p}{dV/V} \equiv B(\text{体積弾性率})$$

空気の体積弾性率

- 音波による圧縮・膨張は，熱の流れより速やかに起きるので，断熱過程
- $p \to dP$
- ２原子分子気体（比熱比$\gamma = 1.4$）の断熱変化

$$PV^{\gamma} = \kappa = 一定$$

$$\frac{dP}{dV} = -\kappa V^{-(1+\gamma)}$$

$$B = -\frac{dP}{dV} V = \gamma P$$

縦波の波動方程式

- $\Delta x\ S$の部分の変位: y
- 運動方程式:

$$S\Delta x\ \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = S\{\left(P + p(x,t)\right) - (P - p(x + \Delta x, t))\}$$

$$\rho\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial x} = B\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

- 波動方程式:

$$B\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \rho\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{\left(\frac{B}{\rho}\right)}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0, \quad c = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$$

音波のパワー密度（強度）

- サイン波の運動エネルギー：$\frac{1}{2}\rho\{S\Delta x\}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2$

- 時間平均 $< \sin^2 \omega t > = \frac{1}{2}$
- 平均の全エネルギー：$u = \frac{1}{2}\rho\{S\Delta x\}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2$

- パワー密度

$$I = cu = \frac{1}{2}c\rho\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}kB\omega A^2 = \frac{1}{2\sqrt{\rho B}}\, {p_{\max}}^2$$

気柱(管)の共鳴

- 境界条件を満たす定在波がたつとき
  - 定在波にならない波
    - 管内で往復し，様々な位相で重なり合う
    - 互いに打ち消し消滅する
- 共鳴条件
  - 閉端：節
  - 開口端：腹
    - 開口端補正