

# 強制振動

# 減衰振動する系に 周期的な外力を加える

例

- 手でブランコを揺らす
- 風が橋を揺らす
- 地震が建物を揺らす

現象の本質：共鳴

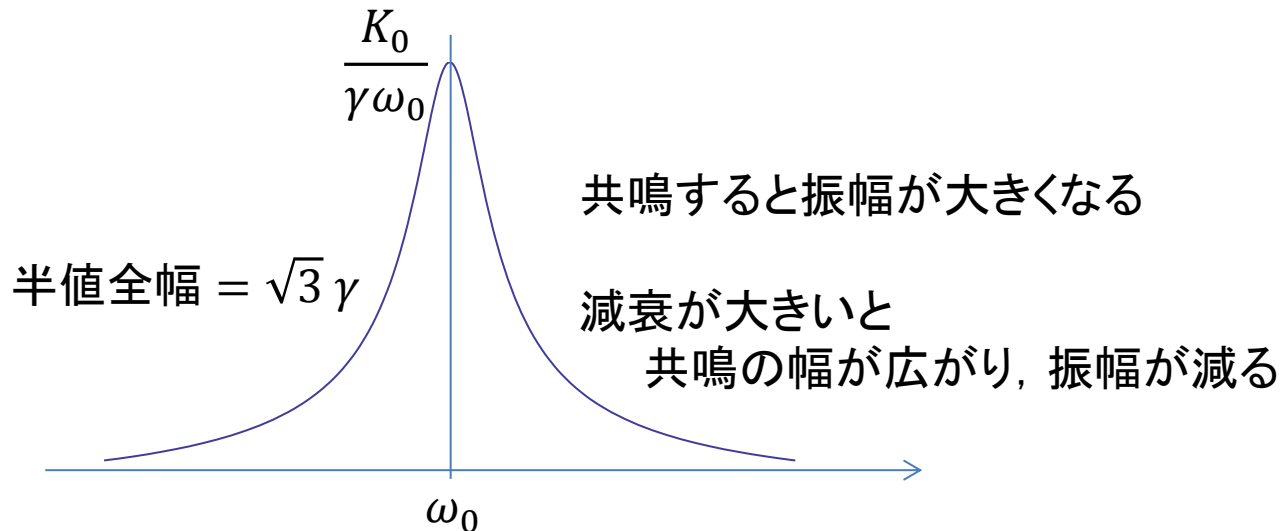
- 系が持つ固有の振動数で揺すられたときに振幅が大きくなる

# 共鳴

- 減衰定数 $\gamma$

- $$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{c}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

- $$\tilde{x} = \frac{K_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} e^{i\omega t} \rightarrow \frac{\frac{K_0}{2\omega_0}}{\sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}} e^{-i\delta}$$



# 外力のエネルギーを吸収する

- 外力Fと変位xの位相差

$$x = \frac{K_0}{2\omega_0 \sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}} \cos(\omega t - \delta)$$
$$\tan \delta = \frac{\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{\omega_0 - \omega}$$

- 外力が単位時間内にする仕事

$$\begin{aligned} \text{仕事率} = Fv &= K_0 \cos \omega t \times \frac{-\omega_0 K_0 \sin(\omega t - \delta)}{2\omega_0 \sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}} \\ &= \frac{K_0^2}{2\sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}} (-\sin(\omega t - \delta) \cos \omega t) \end{aligned}$$

$$\text{共鳴 } (\omega = \omega_0): \delta = \frac{\pi}{2} \rightarrow \text{仕事率} = \frac{K_0^2}{2\sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}} \cos^2 \omega t \text{ (常に正)}$$

- 系は、吸収したエネルギーを $\gamma$ により外部に放出し、定常状態を保つ。