第５回　強制振動　（力学教科書 16 章）

【２階微分方程式の一般解は２個の未定定数をもつ】

この節の結論は以下のとおり．納得していれば，とばして次の節に行ってよい．

２階微分方程式の一般解は２個の積分定数を含む．２階微分方程式の解を求める作業は，本質的には２回微分したものをもとに戻す操作なので，２度の不定積分により一般解の中に２個の積分定数が現れる．

まず準備のために

$$\frac{df}{dt} = -f$$

という微分方程式を「解がべき級数で表される」すなわち

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n + \cdots$$

として解いてみよう．右辺の係数$a_n (n = 0,1,2,\cdots)$が決まれば，解のマクローリン展開が決まり（収束していれば）解が決まったことになる．微分方程式の右辺にべき級数を代入し，項別に微分すると

$$\frac{df}{dt} = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + \cdots + na_n t^{n-1} + na_{n+1} t^n + \cdots$$

$$= -f = -a_0 - a_1 t - a_2 t^2 - \cdots - a_n t^n - \cdots$$

となる．fが正しい解ならば，tの値によらず等号が成りたつので，上式のどの次数の係数も等しいはずである．よって

$$a_1 = -a_0,\ a_2 = -\frac{1}{2} a_1, a_3 = -\frac{1}{3} a_2, \cdots, a_{n+1} = -\frac{1}{n} a_n, \cdots$$

この漸化式をもとにして，すべての係数をa_0だけで書き表すことができる：

$$a_1 = -a_0 = \frac{(-1)^1}{1!} a_0, \qquad a_2 = -\frac{1}{2} a_1 = \frac{(-1)^2}{2!} a_0,\ \ a_3 = -\frac{1}{3} a_2 = -\frac{1}{3!} a_0 = \frac{(-1)^3}{3!} a_0, \cdots a_n = \frac{(-1)^n}{n!} a_0$$

$$f(t) = a_0 \left(\sum_{k=1,\infty} \frac{(-t)^k}{k!} \right) = a_0 e^{-t}$$ （指数関数のマクローリン展開を既知とした）

この解が微分方程式を満たすことはすでに学んでいる．未定の定数が１つ含まれることも，こうして示された．

つぎに，２階の微分方程式

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + u(t) \cdot \frac{df}{dt} + v(t) \cdot f = w(t)$$

$$u(t) = A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + A_3 t^3 + \cdots$$

$$v(t) = B_0 + B_1 t + B_2 t^2 + B_3 t^3 + \cdots$$

$$w(t) = C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + C_3 t^3 + \cdots$$

についても，解をべき級数で表し，各係数を決める漸化式を書く:

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \cdots$$

$$\frac{df}{dt} = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + 4a_3 t^3 + \cdots$$

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = 2a_2 + 3 \cdot 2\, a_3 t + 4 \cdot 3\, a_4 t^2 + \cdots$$

微分方程式が成り立つためには

$$(2\mathrm{a}_2 + 3 \cdot 2\, \mathrm{a}_3 \mathrm{t} + 4 \cdot 3\, \mathrm{a}_4 \mathrm{t}^2 + \cdots) + u(t)(\mathrm{a}_1 + 2\mathrm{a}_2 \mathrm{t} + 3\mathrm{a}_3 \mathrm{t}^2 + 4\mathrm{a}_3 \mathrm{t}^3 + \cdots) + v(t)(\mathrm{a}_0 + \mathrm{a}_1 \mathrm{t} + \mathrm{a}_2 \mathrm{t}^2 + \mathrm{a}_3 \mathrm{t}^3 + \cdots)$$

$$= (2a_2 + u(t)a_1 + v(t)a_0) + (3 \cdot 2a_3 + 2u(t)a_2 + v(t)a_1)t + (4 \cdot 3\, a_4 + 3u(t)a_3 + v(t)a_2)t^2 + \cdots$$

$$= \{2a_2 + (A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + A_3 t^3 + \cdots)a_1 + (B_0 + B_1 t + B_2 t^2 + B_3 t^3 + \cdots)a_0\}$$
$$+ \{3\cdot 2a_3 + 2(A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + A_3 t^3 + \cdots)a_2 + (B_0 + B_1 t + B_2 t^2 + B_3 t^3 + \cdots)a_1\}t +$$
$$= \mathrm{A}_0 + A_1 t + \cdots$$

係数の比較： $2a_2 + A_0 a_1 + B_0 a_0 = A_0,$

$$A_0 a_1 + B_1 a_0 + 3\cdot 2a_3 + 2A_0 a_2 + B_0 a_1 = B_1 a_0 + (A_0 + B_0)a_1 + 2A_0 a_2 + 3\cdot 2\, a_3 = A_1, \cdots$$

第１式から，a_0とa_1が決まればa_2が決まるので，あと芋づる式に全ての係数が決まる．こうして，２階の微分方程式は２個の未定定数を含むことが分かる．２階微分方程式の解を求める作業は，本質的には２回微分したものをもとに戻す操作なので，積分を２回行うことだと考えると，未定定数は２度の不定積分により出てくる積分定数と同じものと考えてよい．その意味で微分方程式の一般解に含まれる未定定数を積分定数ともいう．

$a_0 = f(0)$, $a_1 = \left.\frac{df}{dt}\right|_{t=0} = f'(0)$となるから，$a_0$と$a_1$は初期条件）

【線型微分方程式の独立な２つの解】

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + u(t)\cdot\frac{df}{dt} + v(t)\cdot f = 0$$

の解を２つ見付けたとしよう：

$$\frac{d^2 f_1}{dt^2} + u(t)\cdot\frac{df_1}{dt} + v(t)\cdot f_1 = 0$$

$$\frac{d^2 f_2}{dt^2} + u(t)\cdot\frac{df_2}{dt} + v(t)\cdot f_2 = 0$$

このとき，２個の定数α, βを係数としてf_1とf_2を線型結合した

$$f = \alpha f_1 + \beta f_2$$

も解となることは，これを微分方程式に代入して確かめれば明白である．

$$f(0) = \alpha\, f_1(0) + \beta\, f_2(0),\quad f'(0) = \alpha\, f_1'(0) + \beta\, f_2'(0)$$

これから，αとβを$f(0)$と$f'(0)$で表すと

$$\alpha = \frac{f(0)f_2'(0) - f'(0)f_2(0)}{f_1(0)f_2'(0) - f_1'(0)f_2(0)}$$

$$\beta = \frac{f_1(0)f'(0) - f(0)f_1'(0)}{f_1(0)f_2'(0) - f_1'(0)f_2(0)}$$

こうして，$f(t)$の初期条件$f(0)$と$f'(0)$を決めるとαとβが決まるので，αとβを２つの積分定数と考えてもよい．ただし上２式の分母が０と異なること

$$f_1(0)f_2'(0) \neq f_1'(0)f_2(0) \to \frac{f_1(0)}{f_2(0)} \neq \frac{f_1'(0)}{f_2'(0)}$$

が必要な条件となる．初期条件としては（$t = 0$にとる必要はなく）どんなｔにおけるfとf'の値を用いてもよいはずだから，この条件は

$$\frac{f_1(t)}{f_2(t)} \neq \frac{f_1'(t)}{f_2'(t)} \quad \text{同じことだが，行列式を用いて} \begin{Vmatrix} f_1(t) & f_2(t) \\ f_1'(t) & f_2{}'(t) \end{Vmatrix} \neq 0$$

と書くことができる．

　この条件に反するのは

$$f_1(t) = cf_2(t)$$

となるとき，すなわちf_1とf_2が線型従属なとき（線型独立でないとき）である．

以上をまとめると

線型な２階微分方程式の線型独立な２つの解f_1とf_2を見付ければ，$f=\alpha f_1+\beta f_2$が一般解である

【斉次微分方程式の一般解と対応する非斉次微分方程式の一般解】

$$\frac{d^2f}{dt^2}+u(t)\cdot\frac{df}{dt}+v(t)\cdot f=w(t)$$

において，右辺が　$w(t)\equiv 0$のときこの方程式を斉次とであるといい，そうでないとき非斉次という．

斉次方程式

$$\frac{d^2f}{dt^2}+u(t)\cdot\frac{df}{dt}+v(t)\cdot f=0$$

の線型独立な２つの解をf_1とf_2とする：

$$\frac{d^2}{dt^2}(\alpha f_1+\beta f_2)+u(t)\cdot\frac{d}{dt}(\alpha f_1+\beta f_2)+v(t)\cdot(\alpha f_1+\beta f_2)=0$$

次に，どのような方法でもよいが非斉次方程式の解gが見つかったとする：

$$\frac{d^2g}{dt^2}+u(t)\cdot\frac{dg}{dt}+v(t)\cdot g=w(t)$$

ここで

$$h=(\alpha f_1+\beta f_2)+g$$

という関数は非斉次方程式の解になる．さらに，$h(t)$の初期条件$h(0), h'(0)$が決まることと，αとβが決まることは同等なので，これが非斉次方程式の一般解になる．

以上まとめると

非斉次微分方程式の一般解は，対応する斉次微分方程式の一般解と，非斉次方程式の特解の和として与えられる.

Q.教科書の式(16.5)を出してくる過程を解説してください.

図 16.1 のように，バネの左端の座標を X とする．この位置が時間とともに角振動数ωで振動し，振幅が D である．振動の中心を（教科書ではL_0とおくが）ひとまず，どこかの位置X_0であるとしよう；

$$X(t)=X_0+D\cos\omega t$$

バネの自然長をL_0とすると，バネの右端の座標がxのときバネの長さが$(x-X)$だから，バネの伸びが

$$(x-X)-L_0=x-(X_0+D\cos\omega t)-L_0$$

となる．X_0の位置がどこにあったとしても，考えている現象は変わらないので，式を簡単にするために

$$X_0=-L_0$$

とする．すなわち，バネの左端の中心位置が，原点からバネの自然長だけ左に行った位置になるように原点をとった．こうすることで，左端が振動の中心にあり，かつバネが自然長のとき，右端が原点にくるように原点の位置を決めた．よってバネの伸びは式(16.3)

$$x-X-L_0=x-D\cos\omega t$$

となる．質量 m に加わる力は，伸びが正のときに負となるので，質量m（位置はバネの右端に等しい：x）に対する運動方程式を書くと式(16.5)

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k\,(x - X) = -k(x - D\cos\omega t\,) = -kx + kD\cos\omega t$$

となる．

Q.　式(16.37)から(16.40)までの式変形を説明してください．

任意の複素数　$\alpha + i\beta$　は，極形式で

$$\alpha + i\beta (= r\cos\theta + i\,r\sin\theta) = r\,e^{i\theta}$$

と表すことができる．複素平面上で，原点からの距離は$r = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$，実軸からの角θは$\tan\theta = \frac{\beta}{\alpha}$で与えられる．

式(16.37)の複素数を

$$\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega = r\,e^{i\delta}$$

と表すと式(16.37)右辺と(16.38)すなわち

$$r = \sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2},\quad \tan\delta = \frac{\gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$$

となる．この極形式で表示した量は(16.35)の分母だから，式(16.35)は

$$z_S = \frac{K_0}{r\,e^{i\delta}}e^{i\omega t} = \frac{K_0}{r}e^{-i\delta}e^{i\omega t} = \frac{K_0}{r}e^{i(\omega t-\delta)} = \frac{K_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\gamma\omega)^2}}(\cos(\omega t-\delta) + i\sin(\omega t-\delta))$$

となる．その実部をとると式(16.40)である．

Q.　式(16.41)

$$\mathbf{x} = \frac{\boldsymbol{K_0}}{\sqrt{\left(\boldsymbol{\omega_0^2-\omega^2}\right)^2+(\boldsymbol{\gamma\omega})^2}}\mathbf{cos}(\boldsymbol{\omega t-\delta}) + \boldsymbol{e^{-\frac{\gamma}{2}t}}(\boldsymbol{A}\,\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\omega_1 t} + \boldsymbol{B}\,\mathbf{sin}\,\boldsymbol{\omega_1 t}\,)$$

の右辺第 2 項の取り扱いについて，教科書 p.253 では「時間の経過とともに減衰しその寄与が無視できるようになる．･･･以下，$\mathbf{t} \gg \frac{1}{\gamma}$なる時間のみを問題とし定常解だけを考える」とありますが，この条件$\mathbf{t} \gg \frac{1}{\gamma}$で第 2 項が 0 になるのですか．

第 1 項は振幅$\frac{K_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+(\gamma\omega)^2}}$が一定に保たれて振動する項である．一方，第 2 項は

$$e^{-\frac{\gamma}{2}t}(A\cos\omega_1 t + B\sin\omega_1 t\,) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}\sqrt{A^2+B^2}\cos(\omega_1 t + \phi)$$

とすれば分かるように，振幅が$\sqrt{A^2+B^2}\times e^{-\frac{\gamma}{2}t}$と時間的な指数関数で減衰する．

もちろん第 2 項が 0 に正確に一致することは無いが，どこまでも 0 に近づく．したがって時間さえ十分に長くとれば，第 1 項の振幅に対して第 2 項の振幅をいくらでも小さくすることができる．

Q.　問 16.1 (3)「問題の条件にあう解」を求める方法が分かりません．

(1)の結果，運動方程式が

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = k(h - y + a\sin\frac{2\pi}{\lambda}t\,)$$

である．(2)の結果，その一般解が

$$y = h + \frac{K_0}{\omega_0^2-\omega^2}\sin\omega t\ + A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$$

である．(3)の「問題の条件」とは，初期条件

$$y(0)=h, \qquad \frac{dy}{dt}(0)=0$$

のことであり，この条件を満たすようにAとBの値を具体的に決定することが本問の趣旨である．

$$y(0)=h=h+\frac{K_0}{\omega_0^2-\omega^2}\sin(0)+A\cos(0)+B\sin(0)=h+A \ \rightarrow \boxed{A=0}$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{K_0\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\cos\omega t\ -\omega_0 A\sin\omega_0 t+\omega_0 B\cos\omega_0 t \ \text{より}$$

$$\frac{dy}{dt}(0)=0=\frac{K_0\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\cos(0)\ -\omega_0 A\sin(0)+\omega_0 B\cos(0)=\frac{K_0\omega}{\omega_0^2-\omega^2}+\omega_0 B\rightarrow \boxed{B=-\frac{K_0\frac{\omega}{\omega_0}}{\omega_0^2-\omega^2}}$$

よって

$$y=h+\frac{K_0}{\omega_0^2-\omega^2}\sin\omega t\ +0\times\cos\omega_0 t+\left(-\frac{K_0\frac{\omega}{\omega_0}}{\omega_0^2-\omega^2}\right)\sin\omega_0 t=h+\frac{K_0}{\omega_0^2-\omega^2}(\sin\omega t-\frac{\omega}{\omega_0}\sin\omega_0 t)$$

となる．

Q. 問 16.2 のヒントに「まず F(t)と同じ時間依存性をもつ特解を求める」と書いてありますが，意味がわかりませんでした.

教科書 p.251 の冒頭から p.252 の最終段落の上までに書いた内容が，この特解を求める作業に対応する．

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+kx=F_0e^{-\mu t}$$

$f=A\,e^{-\mu t}$ とおくいてみることが，$F(t)$と同じ時間依存性$e^{-\mu t}$をもつ特解を求める最初の作業である．これを微分方程式に代入すると

$$\{m(-\mu)^2+k\}Ae^{-\mu t}=F_0e^{-\mu t}$$

となるので，恒等的に 0 となる場合を除き

$$A=\frac{F_0}{\{m(-\mu)^2+k\}}=\frac{F_0}{m\mu^2+k}=\frac{\frac{F_0}{k}}{\mu^2+\frac{k}{m}}=\frac{K_0}{\mu^2+\omega_0^2}$$

となる必要がある．こうして，特解が

$$x_s=\frac{K_0}{\mu^2+\omega_0^2}e^{-\mu t}$$

となることが分かる

斉次微分方程式が減衰振動の場合ですら，強制振動が$F_0e^{-\mu t}$や$F_0\cos\omega t$の形でなければ，特解を推定することは非常に困難である．原理的には，強制振動の波形をフーリエ変換して，成分の単振動ごとに特解をもとめて再合成する方法もあるが，よりシステマティックで実用的な方法はラプラス変換を用いるものである（「電磁場と電磁波」の講義で紹介する）．

Q.

① 16.2（3）問題の条件に合う解

初期条件　$t=0$ の時 $y=h, \dfrac{dy}{dt}=0$ より、

$y = h + \dfrac{k_0}{w_0^2 - w^2}(\sin wt - \dfrac{w}{w_0}\sin w_0 t)$ <=　この解がどうやって求まったのかわかりません。