[例題 15.3]

位置エネルギー $V(x)$から生じる力　$F=-\frac{dV}{dx}$　が原因となって振動する：

・振動運動の振幅はいくらでも小さくできるから，物体が静止する状態も極限として「振動」の仲間にしよう．

静止した点は，振動の中心となる点である．その点で受ける力が 0 ($F=-\frac{dV}{dx}=0$) でないなら，物体は

静止状態を保てず動き出してしまうから，振動の中心で物体が受ける力は$F=-\frac{dV}{dx}=0$．この位置で

$V(x)$のグラフは極大（不安定平衡点という）か極小（安定平衡点という）となる．

・平衡点から位置がずれたときに働く力がずれの向きと逆向き（復元力）のときに振動運動が起きる．

平衡点を原点にとると，位置が正のとき$F=-\frac{dV}{dx}<0$すなわち$\frac{dV}{dx}>0$となり，位置が負のときは$\frac{dV}{dx}<0$.

よって，$V(x)$のグラフは下に凸となり，安定平衡点であることが分かる．

本問の場合，

$$V(x)=\frac{1}{2}\frac{A}{x^2}-\frac{B}{x},\qquad (A,B>0)$$

の安定平衡点を探すには，$\frac{d}{dx}V$=0 を解いて見つけた平衡点で$\frac{d^2}{dx^2}V>0$となることを確認する必要がある．

$$\frac{d}{dx}V(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\frac{A}{x^2}\right)-\frac{d}{dx}\left(\frac{B}{x}\right)=\frac{A}{2}\frac{d}{dx}(x^{-2})-B\frac{d}{dx}(x^{-1})=\frac{A}{2}(-2)x^{-3}-B(-1)x^{-2}=-Ax^{-3}+Bx^{-2}=0$$

$$\rightarrow x_0=\frac{A}{B}(>0)\quad \text{これが候補となる}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}V(x)=\frac{d}{dx}(-Ax^{-3}+Bx^{-2})=3Ax^{-4}-2Bx^{-3}=3Ax^{-4}\left(1-\frac{2B}{3A}x\right),$$

$$3A\left(\frac{A}{B}\right)^{-4}\left(1-\frac{2B}{3A}\frac{A}{B}\right)=3A\left(\frac{A}{B}\right)^{-4}\left(1-\frac{2}{3}\right)=A\left(\frac{A}{B}\right)^{-4}=\frac{B^4}{A^3}>0\qquad \text{下に凸，よって安定平衡点である．}$$

微小振動の振動数は，復元力を$F=-kx$としたとき，$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$である．

一方，平衡点のまわりで$V(x)$をテーラー展開すると

$$V(x)=V(x_0)+\left(\frac{dV}{dx}\right)_{x=x_0}(x-x_0)+\frac{1}{2!}\left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)_{x=x_0}(x-x_0)^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{d^3V}{dx^3}\right)_{x=x_0}(x-x_0)^3+\cdots$$

となるが，平衡点（すなわち極値）だから$\left(\frac{dV}{dx}\right)_{x=x_0}=0$，また微小振動なので$(x-x_0)^3$以上の高次項は無視できるとすると

$$V(x)\simeq V(x_0)+\frac{1}{2!}\left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)_{x=x_0}(x-x_0)^2$$

そうすると，復元力は

$$F(x) = -\frac{dV}{dx} = -\left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)_{x=x_0}(x - x_0)$$

と表せるので，$\omega = \sqrt{\frac{\left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)_{x=x_0}}{m}}$ となる．本問の場合には$\left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)_{x=x_0} = \frac{B^4}{A^3}$だから，$\omega = \sqrt{\frac{B^4/A^3}{m}}$を得る．

15 章　章末問題

15.1 つぎの関数をマクローリン展開して第 3 項まで書け．

注：　$f(x)$をマクローリン展開するとは

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots$$

のように「$f(x)$およびその導関数たちの原点における値を用いたべき級数」をつくることである．

1) $\frac{1}{1-x}$ **：**

$f(x) = \frac{1}{1-x}$, $f'^{(x)} = \frac{1}{(1-x)^2}$,　$f''(x) = \frac{2!}{(1-x)^3}$, $f'''(x) = \frac{3!}{(1-x)^4}$となるので

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots = \frac{1}{1-0} + \frac{1}{(1-0)^2}x + \frac{2!}{(1-0)^3}\frac{x^2}{2!} + \frac{3!}{(1-0)^4}\frac{x^3}{3!}\cdots$$

$$= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

第 3 項までで打ち切ると

$$f(x) \simeq 1 + x + x^2$$

2) $\log(1 + x)$ **：**

$f(x) = \log(1 + x)$, $f'^{(x)} = \frac{1}{(1+x)}$,　$f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$, $f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$となるので

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots$$

$$= \log(1 + 0) + \frac{1}{(1+0)}x + \frac{-1}{(1+0)^2}\frac{x^2}{2!} + \frac{2}{(1+0)^3}\frac{x^3}{3!} - \frac{6}{(1+0)^4}\frac{x^4}{4!}\cdots$$

$$= 0 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\cdots$$

第 3 項までで打ち切ると

$$f(x) \simeq x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$$

15.2 位置エネルギーが

$$\boldsymbol{V(x) = \frac{V_0}{2}\left(\frac{a^2}{x^2} + \frac{x^2}{a^2}\right) \quad (a > 0,\ V_0 > 0)}$$

で与えられる力を受けて，質量$\boldsymbol{m}$の質点が$\boldsymbol{x}$軸の正の部分を運動する．

1)　平衡点を求めよ．

位置エネルギーの極小が安定平衡点，極大が不安定平衡点となる．

$$V'=\frac{V_0}{2}\left(-\frac{2a^2}{x^3}+\frac{2x}{a^2}\right)=0$$

を解くと$x=\pm a$．また題意より$a>0$，これと$x>0$より $x=a$ が平衡点である．

2) 平衡点から質点を少しずらしたとき質点はどのような運動をするか.（ヒント: § 15.2 の②を参考にせよ.）

安定平衡点では，ずれが回復して振動運動するが，不安定平衡点では遠ざかるのみである．

$V(x)$の 2 階微分の符号により安定か不安定かを知ることが出来る．

$$\frac{d^2V}{dx^2}=\frac{V_0}{2}\left(\frac{2}{a^2}+\frac{6a^2}{x^4}\right),\quad V''(a)=\frac{V_0}{2}\left(\frac{2}{a^2}+\frac{6a^2}{a^4}\right)=\frac{4V_0}{a^2}>0$$

より$V(x)$は$x=a$で極小．よって$x=a$は安定な平衡点である．この安定平衡点のまわりの微小変位に対し質点は単振動する．$x=a$の付近の$V(x)$の形を放物線（フックの法則にしたがうバネによる質点の運動の位置エネルギー）で近似すると

$$V(x)\simeq V(a)+\frac{1}{2}V''(a)(x-a)^2=V_0+\frac{1}{2}\frac{4V_0}{a^2}(x-a)^2 \rightarrow \text{バネ定数}k=\frac{4V_0}{a^2}$$

フックの法則に従うバネ定数 k のバネによって質量 m のおもりが行う単振動の角振動数は式(15.8)より

$$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{4V_0}{a^2}\frac{1}{m}}=\frac{2}{a}\sqrt{\frac{V_0}{m}}$$

15.3 運動方程式(15.64)

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx-c\frac{dx}{dt}\qquad (k>0,\ c>0)$$

に従う振動系がある．ただし $c^2<4mk$である．時刻$t=0$にバネをaだけ引き伸ばし静かに放した.

時刻 $t(\geq 0)$での質点の位置を求めよ.

題意の式の両辺をmで割り

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{k}{m}x-\frac{c}{m}\frac{dx}{dt}=-\omega_0^2x-\gamma\frac{dx}{dt},\qquad \omega_0^2=\frac{k}{m},\qquad \gamma=\frac{c}{m}$$

問題で与えられた条件$c^2<4mk$は，$c=m\gamma$，$k=m\omega_0^2$ を代入して$\gamma^2<4\omega_0^2$すなわち

$$\frac{\gamma}{2}<\omega_0$$

の場合である.

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\gamma\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=0$$

の一般解は式(15.75)で与えられる：

$$x=e^{-\frac{\gamma}{2}t}(A\cos\omega_1 t+B\sin\omega_1 t),\quad \omega_1=\sqrt{\omega_0^2-\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}>0$$

初期条件 $x(0)=a,\ v(0)=0$を満たすよう定数 A,B を定める．まず

$$x(0)=e^{-\frac{\gamma}{2}\times 0}(A\cos(\omega_1\times 0)+B\sin(\omega_1\times 0))=e^0\ (A\times 1+B\times 0)=A=a$$

つぎに

$$v=\frac{dx}{dt}=e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left\{\left(-\frac{\gamma}{2}a+B\,\omega_1\right)\cos\omega_1 t-\left(\frac{\gamma}{2}B+a\omega_1\right)\sin\omega_1 t\right\}$$

より$v(0)=0$が成り立つためには

$$-\frac{\gamma}{2}a + B\,\omega_1 = 0 \rightarrow \;\; B = \frac{\gamma a}{2\omega_1}$$

以上を総合すると

$$x = a\,\mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2}t}\left(\cos\omega_1 t + \frac{\gamma}{2\omega_1}\sin\omega_1 t\right)$$

15.4 水平面内にある棒の一端 O から距離$\boldsymbol{r_0}$のところに質量$\boldsymbol{m}$のリングを掛け，O を通る鉛直軸のまわりに棒を等角速度 ω で回転させた．リングの棒にそった運動を，時間の関数として表せ．リングと棒の間の摩擦力は無視できるとする．（ヒント：棒と一緒に回転する座標系で考えるとよい．これは振動の問題でなく，線形微分方程式を解く問題.）

棒とともに回転する座標系では，リングの位置は棒にそって原点から測った距離rだけで決まる．だが，回転運動する非慣性系なので，遠心力を仮定する（それ以外の力，たとえばコリオリ力や重力は棒と垂直方向に働くので，リングが棒から受ける力により相殺される）．運動方程式は

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = mr\omega^2$$

整理すると

$$\frac{d^2r}{dt^2} - \omega^2 r = 0$$

【解の形】

もとの関数形と２回微分した関数形とが（定数を除いて）同じになるから

$$r = \mathrm{e}^{\alpha t}$$

とおいて解（解となるためのαの値）を探す：

$$\frac{d^2r}{dt^2} - \omega^2 r = \frac{d^2\mathrm{e}^{\alpha t}}{dt^2} - \omega^2\mathrm{e}^{\alpha t} = \alpha^2 e^{\alpha t} - \omega^2 e^{\alpha t} = (\alpha^2 - \omega^2)e^{\alpha t} = 0$$

$e^{\alpha t} \neq 0$だから$\alpha^2 - \omega^2 = 0$．よって$\alpha = \pm\omega$．すなわち$e^{\omega t}$と$e^{-\omega t}$のいずれも解になることができ，微分方程式が線形なので

$$\alpha e^{\omega t} + \beta\mathrm{e}^{-\omega t}$$

も解となる．

【１次独立な２つの解の線形結合は２階の線形微分方程式の一般解となる】

$e^{\omega t}$と$e^{-\omega t}$が１次独立である：その意味は「任意の t について$\alpha e^{\omega t} + \beta\mathrm{e}^{-\omega t} = 0$ならばα＝β=0 しかありえない」．このとき

$$r(t) = A\mathrm{e}^{\omega t} + Be^{-\omega t} \quad \rightarrow r(0) = r_0 = A + B$$

と

$$\frac{dr}{dt} = \omega Ae^{\omega t} - \omega Be^{-\omega t} \quad \rightarrow v(0) = v_0 = \omega(A - B)$$

を用いて A と B を決めることができる．

一方，もし$f(t)$と$g(t)$が１次独立でないときは，$f(t) = kg(t)$となるので，

$$r(t) = A\,f(t) + B\,g(t) = (Ak + B)f(\mathrm{t}) \quad \rightarrow r(0) = r_0 = Af(0) + Bg(0) = (Ak + B)g(0)$$

$$v(t) = Af'(t) + Bg'(t) = (Ak + B)f'(\mathrm{t}) \quad \rightarrow v(0) = v_0 = Af'(0) + Bg'(0) = (Ak + B)f'(0)$$

を用いても A と B を決めることができない．

【一般解から初期条件を満たす解を求める】

こうして，$e^{\omega t}$と$e^{-\omega t}$が 1 次独立であるから，$r(t) = A\mathrm{e}^{\omega t} + Be^{-\omega t}$が一般解となる．初期条件

$$r_0 = A + B,\quad v_0 = 0 = \omega(A - B)$$

を適用すると$A = B = \frac{r_0}{2}$．よって

$$r(t) = \frac{r_0}{2}(e^{\omega t} + e^{-\omega t})$$

を得る．

定数変化法の適用範囲：

http://ja.wikipedia.org/wiki/%E5%AE%9A%E6%95%B0%E5%A4%89%E5%8C%96%E6%B3%95

斉次（同次ともいう）の線型微分方程式の一般解が分かっているときに，対応する非斉次の微分方程式の解を求めるのに使うことができる．