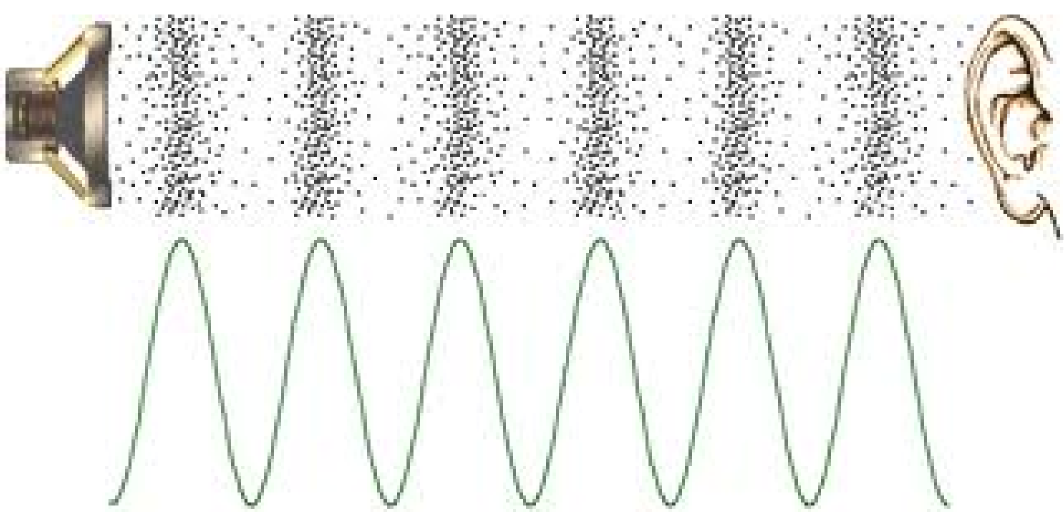
単振動
要点の復習

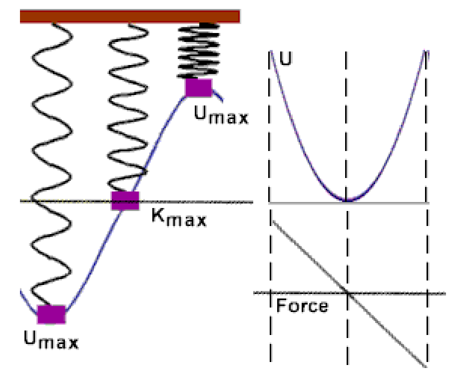
「振動」の重要性

- 波の発生源は　振動　している
- 波を伝える媒質の各点は　振動　している
- 波を受ける物体（装置）は　振動　している

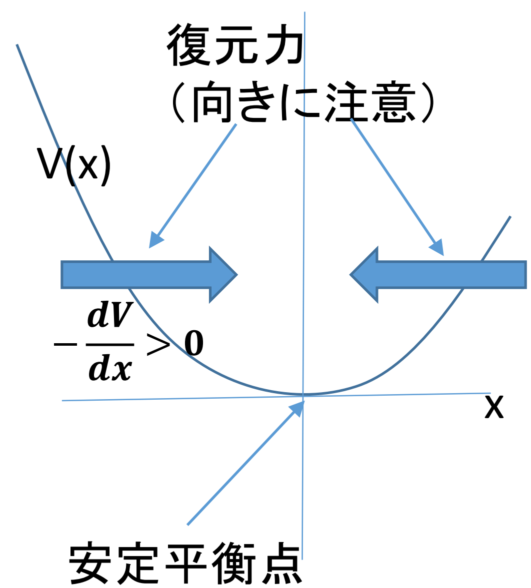


振動現象が起きる状況

- 「作用する力」の特性として
  - 復元力があるとき
    - 物体の変形をもとに戻そうとして作用する力
    - 典型かつ理想的な例
      - フックの法則を満たすバネの復元力
- 「位置エネルギー」の特性として
  - 安定平衡点のまわりで



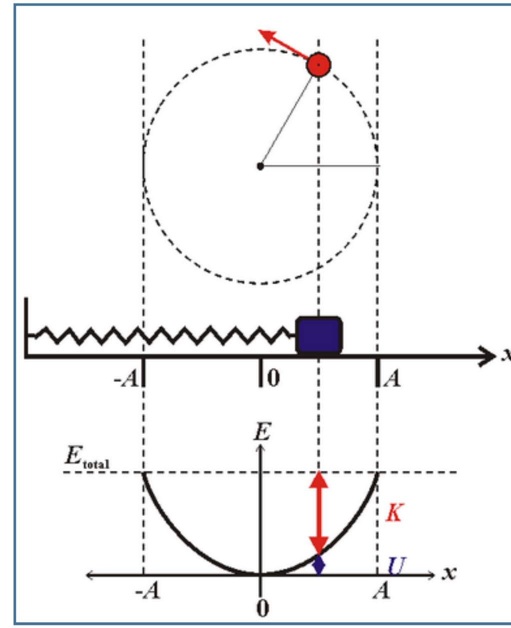
- $F = -\frac{dV}{dx}$だから，これらは同じ内容



フックの法則に従う運動

$$F = m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

- 角速度ω，半径Aの等速円運動と比較
  - 円運動の向心力： $\vec{F} = \left(F_x, F_y\right) = -(m\omega^2 x, m\omega^2 y)$
  - X成分の運動方程式： $F = m\frac{d^2x}{dt^2} = -m\omega^2 x$

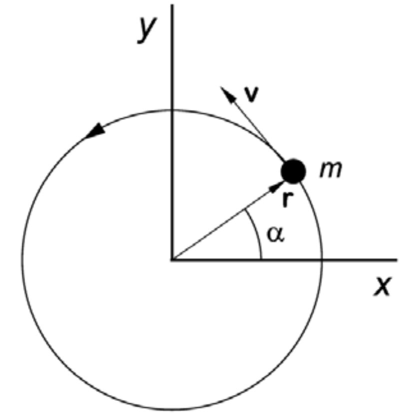


円運動のX成分の座標：

$$x(t) = A\cos(\omega t + \theta)\,, \omega^2 = \frac{k}{m}$$

復元力がフックの法則に従うとき，運動は単振動となる

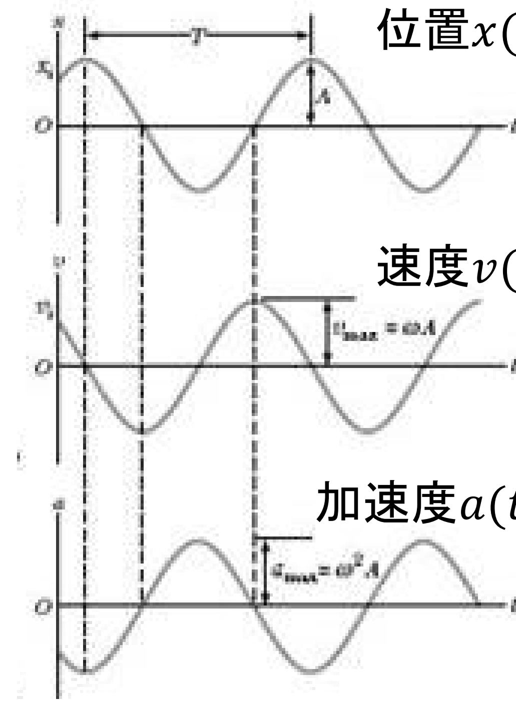
位置，速度，加速度



$$x(t), \qquad v(t) = \frac{dx}{dt}, \qquad a(t) = \frac{dv}{dt}$$

- 微分法，積分法で情報の変換が可能である.

- 単振動の速度＝単振動
- 単振動の加速度＝単振動
  - それぞれ，位相が90度異なる.
  - $v_{\mathrm{max}} = A\ \omega$, 変位0で最速
  - $a_{\mathrm{max}} = v_{\mathrm{max}}\omega = A\omega^2 = \frac{v_{\mathrm{max}}^2}{A}$，最速で加速度0



位置$x(t)$

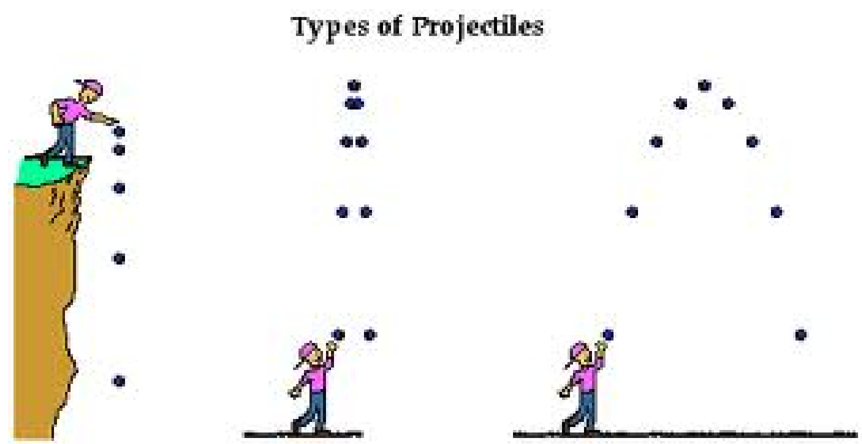
速度$v(t)$

加速度$a(t)$

初期位置と初速度から運動を決める

- ニュートンの運動方程式:
  - 2階微分方程式
  - 力と質量が分かっているとき
    - 任意時刻の加速度＋初速度　→　任意時刻の速度
    - 任意時刻の速度　＋初期位置　→　任意時刻の位置

位置を表す解の
任意定数2個が,
初速度と初期位置
で決まる.



エネルギー保存則

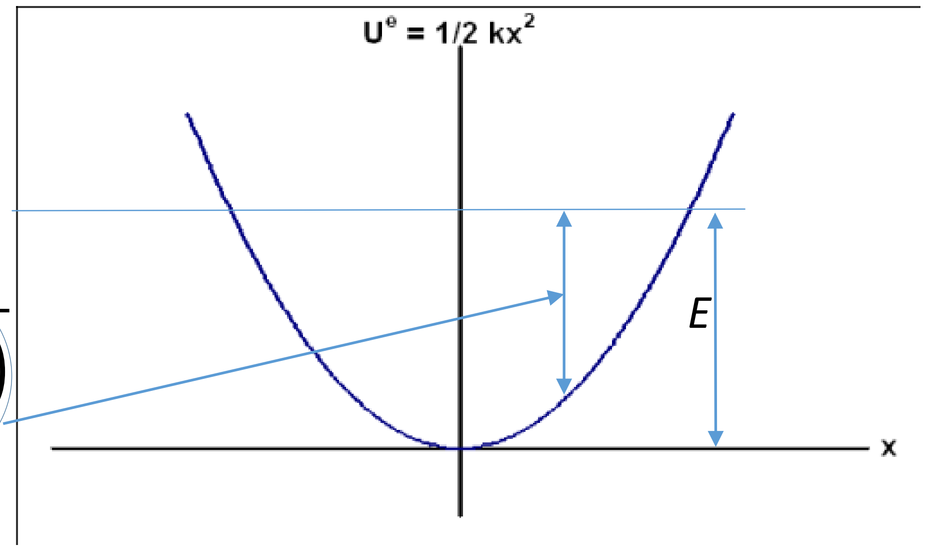
- $F = -kx = -\frac{d}{dx}V \quad \rightarrow \quad V = \frac{1}{2}kx^2$
- 保存力$F = -kx$による運動では

$$\frac{1}{2}mv^2 + V(x) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E = 一定$$

  - $x = 0: \frac{1}{2}m{v_{\mathrm{max}}}^2 = E$
  - $x = A: \frac{1}{2}kA^2 = E$

運動方程式を解かずに,
任意の位置の速度が分かる

$$v(x) = \sqrt{\frac{E - \frac{1}{2}kx^2}{\frac{1}{2}m}} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{1}{2}kx^2\right)}$$



単振動の数学的パターン

- 変数 x
  - xの例：空間座標，角度，電場，もしかすると金額，人数

- 変数 xの従う式が

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

となるとき，xは角振動数ωの単振動となる．

- xの最大値，$v = \frac{dx}{dt}$の最大値は初期条件から簡単に予測できる．

単振動を扱う数学的な道具

- 複素指数関数

$$A\cos(\omega t+\theta):\quad Ae^{i\theta}\,e^{i\omega t}=\tilde{A}\,e^{i\omega t}$$ の実部

- 線形演算（定数倍，和・差，微分，積分）

実部の演算結果と，演算結果の実部が同じ

$\tilde{A}\,e^{i\omega t}$により位相の変化まで（簡単に）計算できる

運動方程式を解く -1-

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

$\tilde{x}(t) = \tilde{A}\ e^{i\omega t}$（の実部が$x$に等しい）とおく（$\omega$>0とする）

$-\omega^2 m\tilde{A}e^{i\omega t} = -k\tilde{A}e^{i\omega t}$

$\rightarrow (m\omega^2 - k)\tilde{A}e^{i\omega t} = 0$

$\rightarrow m\omega^2 - k = 0$ ∵ そうでないと常に$x(t) = 0$となり運動が起きない

$$\omega = \pm\sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow \sqrt{\frac{k}{m}}$$

運動方程式を解く -2-

２階微分方程式：$x(t)$は2個の積分定数を含む

- 一般解に含まれる積分定数

$$\tilde{x}(t) = \tilde{A}\, e^{i\omega t} = A_0 e^{i\phi} e^{i\omega t}$$

- *実数解に含まれる積分定数との関係*

$$\begin{aligned} x = \mathrm{Re}[\tilde{x}] &= A_0 \cos(\omega t + \phi) \\ &= A_0 \cos\phi \cos\omega t - A_0 \sin\phi\ \sin\omega t \\ &= a \cos\omega t + b \sin\omega t \end{aligned}$$

運動方程式を解く -3-

積分定数を決める初期条件

$$x(0) = x_0,\ v(0) = v_0$$

$$\tilde{x}(0) = \tilde{A} = A_0 e^{i\phi}$$

$$\rightarrow \quad x(0) = \mathrm{Re}\big[\tilde{A}\big] = A_0 \cos\ \phi = a$$

$$\tilde{v}(0) = \frac{d\tilde{x}}{dt}\bigg|_{t=0} = i\omega\tilde{A}$$

$$\rightarrow \quad v(0) = \mathrm{Re}\left[i\omega\tilde{A}\right] = \omega\ \mathrm{Im}\big[-\widetilde{\mathrm{A}}\big] = -\omega A_0 \sin\phi = \frac{b}{\omega}$$

$$cf.\quad x(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t \rightarrow v(t) = -\omega a\sin\omega t + \omega b\cos\omega t$$

注

$$\omega = \pm\omega_0 = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}$$ としたとき

$$\tilde{x} = \widetilde{\alpha_1} e^{i\omega_0 t} + \widetilde{\alpha_2} e^{-i\omega_0 t}$$

2個の積分定数だけしか自由度がないので，$\widetilde{\alpha_1}$と$\widetilde{\alpha_2}$は独立ではない．

互いに複素共役に選ぶ：

$$\widetilde{\alpha_1} = \alpha_0 e^{i\phi}, \widetilde{\alpha_2} = \alpha_0 e^{-i\phi}$$

$$\tilde{x} = \alpha_0 e^{i(\omega_0 t + \phi)} + c.c. = 2\alpha_0 \cos(\omega_0 t + \phi)$$