演習：複素指数関数を用いた解法

$\frac{d^2\tilde{x}}{dt^2} + \gamma\frac{d\tilde{x}}{dt} + \omega_0^2\tilde{x} = 0$ は $\tilde{x} = \tilde{A}\, e^{i\omega t}$ の形の解をもつ：

$$(-\omega^2 + i\omega\gamma + \omega_0^2)\tilde{A}e^{i\omega t} = 0$$

$$\rightarrow \quad \tilde{A}e^{i\omega t} \neq 0 \text{ だから } \omega^2 - i\gamma\omega - \omega_0^2 = 0$$

2次方程式の解と係数の関係を用い

$$\omega = \frac{1}{2}\left(i\gamma \pm \sqrt{-\gamma^2 + 4\omega_0^2}\right) = i\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}$$

$\omega_0 > \frac{\gamma}{2}$ として

$$e^{i\omega t} = e^{i\left(i\frac{\gamma}{2}\pm\sqrt{\omega_0^2-\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}\right)t} = e^{-\frac{\gamma}{2}t}\, e^{\pm i\Omega t} \rightarrow e^{-\frac{\gamma}{2}t}\, e^{i\Omega t}, \qquad \Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}$$

$$\tilde{x} = A_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t}\, e^{i(\Omega t+\phi)} \rightarrow x(t) = A_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos(\Omega t + \phi)$$

演習：複素指数関数を用いた解法

初期条件から未定の定数を決める：

$\tilde{x}(0) = A_0 e^{i\phi}$

$\quad \to x(0) = x_0 = A_0 \cos\phi$

$\tilde{v}(t) = \dfrac{d\tilde{x}}{dt} = \left(-\dfrac{\gamma}{2} + i\Omega\right) A_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t}\, e^{i(\Omega t+\phi)}$

$\quad \to \tilde{v}(0) = \left(-\frac{\gamma}{2} + i\Omega\right) A_0 e^{i\phi}$

$\quad \to v(0) = v_0 = A_0(-\frac{\gamma}{2}\cos\phi - \Omega\sin\phi) \;= -\frac{\gamma}{2}x_0 - A_0\,\Omega\,\sin\phi$

よって

$$A_0\cos\phi = x_0, \qquad A_0\,\sin\phi = \frac{1}{\Omega}\left(\frac{\gamma}{2}x_0 - v_0\right)$$

から振幅A_0と初期位相（のタンジェント）$\tan\phi$ が決まる.

注

$e^{-\frac{\gamma}{2}t}\,e^{\pm i\Omega t}$の2つの解を用いるとき，2個の未定の定数を，振幅と初期位相により

$$\alpha = A_0 e^{i\phi}$$

として与えると

$$\tilde{x} = \alpha\, e^{-\frac{\gamma}{2}t}\, e^{i\Omega t} + \bar{\alpha}\, e^{-\frac{\gamma}{2}t}\, e^{-i\Omega t} = A_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\Omega t + \phi)$$