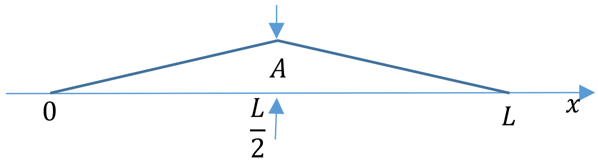
【問】両端を固定した長さLの弦(弦を張った方向をx軸とする)を伝わる横波(振動の方向をy軸とする)の速さがcである，$t=0$において弦の中央をつまんで変位がAとなるように引っ張り，静かに離した：

境界条件：$y(0,t)=y(L,t)=0,$

初期条件: $\frac{\partial y(x,0)}{\partial t}=0,\quad y(x,0)=g(x)=\begin{cases}2A\left(\frac{x}{L}\right) & \cdots 0\le x\le \frac{L}{2}\\ 2A\left(1-\frac{x}{L}\right) & \cdots \frac{L}{2}\le x\le L\end{cases},$

この弦の運動をフーリエ解析を用いて調べよ．次の順で考えよ．



1.　この弦を伝わる波を解とする波動方程式を記せ．

2. $f_n(x,t)=B\sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right)\cos(\omega_n t)$　(nは自然数)　は前問の波動方程式の解であるという．

2-1　これらの波は定在波か進行波かを，理由とともに答えよ．

2-2　ω_nをL，c，nを用いて表せ．ヒント：波動方程式に$f_n(x,t)$を代入せよ．

2-3　f_1について，cos の位相が$0,\frac{\pi}{2},\pi$となる時刻を選び，波の様子をスケッチせよ（時刻も記す）．

2-4　f_2について，cos の位相が$0,\frac{\pi}{2},\pi$となる時刻を選び，様子をスケッチせよ（時刻も記す）．

3. 問 2 を一般化した波

$$f(x,t)=X(x)\,T(t)$$

が波動方程式を満たすという．ここで$X(x)$ はxだけの関数で変数tを含まず，$T(t)$はtだけの関数でxを含まない．この$f(x,t)$を波動方程式に代入し，$X(x)$が従う微分方程式　$\frac{d^2X}{dx^2}=KX$と，$T(t)$が従う微分方程式　$\frac{d^2T}{dt^2}=c^2KT$を導け．ヒント：変数分離

4. 波は時間的に振動するので，問 3 で導いた式において$K<0$である．あらためて$K\to -K^2$と書き換える（もちろん，置換前の K の絶対値の平方根が，置換後の K)

$$\frac{d^2X}{dx^2}=-K^2X,\qquad \frac{d^2T}{dt^2}=-c^2K^2T$$

4-1 まず　$\frac{d^2X}{dx^2}=-K^2X$　の一般解を求め，$X(0)=X(L)=0$となる特解が$X(t)=X_n\sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right)$となることを確認せよ．ヒント：振幅$X_n$は決まらないままでよいが，波長は決まる．

4-2 前問 4-1 で定めた$K_n=n\frac{\pi}{L}$を用いて，$\frac{d^2T}{dt^2}=-c^2K_n^2T$の一般解を求めよ．静かに放したので，t=0 における速度が 0 であることに対応し　$\frac{dT}{dt}(0)=0$　を満たす特解が$T(t)=T_n\cos\left(n\frac{c\pi}{L}t\right)$となることを確かめよ．ヒント：振幅は決まらないままでよい．

ここまでに得られた知識を総合すると，波動方程式　$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=0$　を満たす解で　$f(x,t)=X(x)\,T(t)$　の形のもののうち，境界条件：$y(0,t)=y(L,t)=0$，初期条件: $\frac{\partial y(x,0)}{\partial t}=0$　を満たすのは

$$f_n(x,t)=X_n\sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right)\times T_n\cos\left(n\frac{c\pi}{L}t\right)=A_n\sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right)\cos\left(n\frac{c\pi}{L}t\right),\quad A_n\equiv X_nT_n,\qquad n\text{は自然数}$$

の形になる．

さらに，波動方程式の線形性から，$f_n(x,t)$の和（同じことだが線形の重ね合わせ）もまた同じ条件を満たす解である：

$$f(x.t)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x,t)$$

が初期条件

$$y(x,0) = g(x) = \begin{cases} 2A\left(\dfrac{x}{L}\right) & \cdots 0 \le x \le \dfrac{L}{2} \\ 2A\left(1-\dfrac{x}{L}\right) & \cdots \dfrac{L}{2} \le x \le L \end{cases}$$

を満たすように係数A_nを決めれば，この初期条件から出発する波の運動が記述できたことになる.

5.

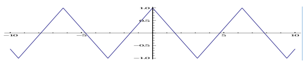
$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right)\cos\left(n\frac{c\pi}{L}t\right)$$

で$t=0$とすると最初の弦の形$g(x)$と一致する．このことを用いて A_nをgとの関係で表す．mは自然数.

既に，gとよく似た形の波形のフーリエ級数をすでに学んでいる：

$$h(t) = \begin{cases} 1+4\frac{t}{T} \cdots -\frac{T}{2} < t \le 0 \\ 1-4\frac{t}{T} \cdots \quad 0 < t \le \frac{T}{2} \end{cases}$$

三角波 ±１，t=0 でピーク，左右対称



のフーリエ級数展開は

$$h(t) = \frac{8}{\pi^2}\left\{\cos\omega t + \frac{1}{3^2}\cos 3\omega t + \frac{1}{5^2}\cos 5\omega t + \cdots\right\}$$

となる.

5-1 グラフの形の比較：hのグラフを 1/4 周期だけ右にずらすと，gのグラフと相似になることを確認せよ．hのグラフを g のグラフとして用いるとき，弦の長さ L と ω の関係を調べよ（ω を L のどんな関数で置き換えるとよいか).

5-2 $h(t)$の各項の tに$\left(t-\frac{T}{4}\right)$を代入し，各項をサイン関数を用いて式を書き直せ．その結果に基づき，$g(x)$をサイン関数の和で表せ.

5-3 上問 5-2 の結果と

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\left(k\frac{\pi}{L}x\right)$$

とを比べてA_kをAにより表せ.

6. すべてを総合し，与えらえた初期条件と境界条件のもとで，フーリエ展開を用いた弦の横波の式を記せ.

答案

1.　この弦を伝わる波を解とする波動方程式を記せ．

【解】

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=0$$

2. $\boldsymbol{f_n(x,t)=B\sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right)\cos(\omega_n t)}$　($\boldsymbol{n}$は自然数)　は前問の波動方程式の解であるという．

2-1　これらの波は定在波か進行波かを，理由とともに答えよ．

【解】

波形$B\sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right)$が時間とともに移動せず，$\cos(\omega_n t)$にしたがって振動するだけである．
とくに$n\frac{\pi}{L}x=m\pi\rightarrow\ x=\frac{m}{n}L$ の位置では時間によらず常に振幅が 0（節）となる．これより定在波である．

2-2　$\boldsymbol{\omega_n}$を$\boldsymbol{L}$，$\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{n}$を用いて表せ．ヒント：波動方程式に$\boldsymbol{f_n(x,t)}$を代入せよ．

【解】

$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=-\left(n\frac{\pi}{L}\right)^2 B\sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right)\cos(\omega_n t)$,　$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=-\omega_n^2 B\sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right)\cos(\omega_n t)$．波動方程式が成り立ち$B\neq 0$のとき

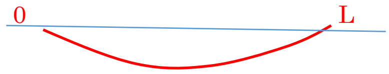
$$\left(n\frac{\pi}{L}\right)^2-\frac{1}{c^2}\omega_n^2=0\ \rightarrow\ \omega_n=\pi\frac{c}{L}\times n$$

2-3　$\boldsymbol{f_1}$について，cos の位相が$\boldsymbol{0,\frac{\pi}{2},\pi}$となる時刻を選び，波の様子をスケッチせよ（時刻も記す）．

【解】　$t=0$

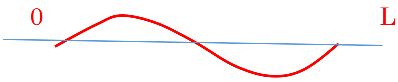
$t=\frac{\pi}{2\omega_1}=\frac{L}{2c}$

$t=\frac{\pi}{\omega_1}=\frac{L}{c}$

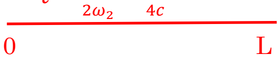


2-4　$\boldsymbol{f_2}$について，cos の位相が$\boldsymbol{0,\frac{\pi}{2},\pi}$となる時刻を選び，様子をスケッチせよ（時刻も記す）．

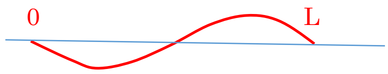
【解】　$t=0$



$t=\frac{\pi}{2\omega_2}=\frac{L}{4c}$



$t=\frac{\pi}{\omega_2}=\frac{L}{2c}$



3. 問 2 を一般化した波

$$\boldsymbol{f(x,t)=X(x)\,T(t)}$$

が波動方程式を満たすという．ここで$\boldsymbol{X(x)}$ は$\boldsymbol{x}$だけの関数で変数$\boldsymbol{t}$を含まず，$\boldsymbol{T(t)}$は$\boldsymbol{t}$だけの関数で$\boldsymbol{x}$を含まない．この$\boldsymbol{f(x,t)}$を波動方程式に代入し，$\boldsymbol{X(x)}$が従う微分方程式　$\boldsymbol{\frac{d^2X}{dx^2}=KX}$と，$\boldsymbol{T(t)}$が従う微分方程式　$\boldsymbol{\frac{d^2T}{dt^2}=c^2KT}$を導け．ヒント：変数分離

【解】　$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{d^2X}{dx^2}\times T$,　$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=X\times\frac{d^2T}{dt^2}$　→　$\frac{d^2X}{dx^2}\times T-\frac{1}{c^2}X\times\frac{d^2T}{dt^2}=0$　→　$\frac{d^2X}{dx^2}\times T=\frac{1}{c^2}X\times\frac{d^2T}{dt^2}$

両辺を$X\times T$でわると

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}=\frac{1}{c^2}\frac{1}{T}\frac{d^2T}{dt^2}$$

となる．左辺はxだけの式，右辺はtだけの式，これらが等しいとはxもtも含まない定数Kである．

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}=K,\qquad \frac{1}{c^2}\frac{1}{T}\frac{d^2T}{dt^2}=K\quad\rightarrow\quad \frac{d^2X}{dx^2}=KX,\qquad \frac{d^2T}{dt^2}=c^2KT$$

4. 波は時間的に振動するので，問 3 で導いた式において$K<0$である．あらためて$K\rightarrow -K^2$と書き換える（もちろん，置換前の K の絶対値の平方根が，置換後の K）

$$\frac{d^2X}{dx^2}=-K^2X,\qquad \frac{d^2T}{dt^2}=-c^2K^2T$$

4-1 まず　$\frac{d^2X}{dx^2}=-K^2X$　の一般解を求め，$X(0)=X(L)=0$となる特解が$X(t)=X_n\sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right)$となることを確認せよ．ヒント：振幅$X_n$は決まらないままでよいが，波長は決まる．

【解】　一般解は $X(x)=X_n\sin\ (Kx)+X_n'\cos(Kx)$

境界条件： $X(0)=X_n'=0 \quad \to \quad X(t)=X_n\sin(Kx)$

境界条件： $X(L)=X_n\sin(KL)=0 \ \to KL=n\pi,\ n=1,2,3,\cdots \ \to \ K=n\frac{\pi}{L}$

特解： $X(t)=X_n\sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right)$

4-2 前問 4-1 で定めた$K_n=n\frac{\pi}{L}$を用いて，$\frac{d^2T}{dt^2}=-c^2K_n^2T$の一般解を求めよ．静かに放したので，t=0 における速度が 0 であることに対応し $\frac{dT}{dt}(0)=0$ を満たす特解が$T(t)=T_n\cos\left(n\frac{c\pi}{L}t\right)$となることを確かめよ．ヒント：振幅は決まらないままでよい．

【解】

一般解は $T(t)=T'_n\sin\left(n\frac{c\pi}{L}t\right)+T_n\cos\left(n\frac{c\pi}{L}t\right)$.

$\frac{dT}{dt}=n\frac{c\pi}{L}T_n'\cos\left(n\frac{c\pi}{L}t\right)-n\frac{c\pi}{L}T_n\sin\left(n\frac{c\pi}{L}t\right)$, $\frac{dT}{dt}(0)=n\frac{c\pi}{L}T'_n=0 \ \to \ T_n'=0$

特解は $T(t)=T_n\cos\left(n\frac{c\pi}{L}t\right)$

5.

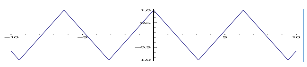
$$\boldsymbol{f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right)\cos\left(n\frac{c\pi}{L}t\right)}$$

で$\boldsymbol{t=0}$とすると最初の弦の形$\boldsymbol{g(x)}$と一致する．このことを用いて $\boldsymbol{A_n}$を$\boldsymbol{g}$との関係で表わす．$\boldsymbol{m}$は自然数.

既に，$\boldsymbol{g}$とよく似た形の波形のフーリエ級数を学んでいる：

$$\boldsymbol{h(t)=\begin{cases}1+4\frac{t}{T}\cdots-\frac{T}{2}<t\le 0\\ 1-4\frac{t}{T}\cdots \quad 0<t\le\frac{T}{2}\end{cases}}$$

三角波 ±1，t=0 でピーク，左右対称



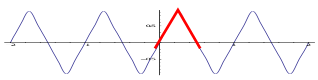
のフーリエ級数展開は

$$\boldsymbol{h(t)=\frac{8}{\pi^2}\left\{\cos\omega t+\frac{1}{3^2}\cos 3\omega t+\frac{1}{5^2}\cos 5\omega t+\cdots\right\}}$$

となる.

5-1 グラフの形の比較：$\boldsymbol{h}$のグラフを 1/4 周期だけ右にずらすと，$\boldsymbol{g}$のグラフと相似になることを確認せよ．$\boldsymbol{h}$のグラフを g のグラフとして用いるとき，弦の長さ L と ω の関係を調べよ（ω を L のどんな関数で置き換えるとよいか）.

【解】Lはhのグラフの周期の 1/2 であるから，$\omega=\frac{2\pi}{T}\to\frac{\pi}{L}\left(=\frac{2\pi}{2L}\right)$という置き換えになる



5-2 $\boldsymbol{h(t)}$の各項の $\boldsymbol{t}$に$\left(\boldsymbol{t-\frac{T}{4}}\right)$を代入し各項をサイン関数で書き直せ．その結果をもちいて$\boldsymbol{g(x)}$をサイン関数の和で表せ.

【解】

$$\cos\left[\omega\left(t-\frac{T}{4}\right)\right]=\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\omega t,\quad \cos\left[3\omega\left(t-\frac{T}{4}\right)\right]=\cos\left(3\omega t-\frac{3}{2}\pi\right)=-\sin 3\omega t,\quad \cos\left[5\omega\left(t-\frac{T}{4}\right)\right]=\sin 5\omega t, etc$$

$$g(x)=A\times\frac{8}{\pi^2}\left\{\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)+\frac{-1}{3^2}\sin\left(3\frac{\pi}{L}x\right)+\frac{1}{5^2}\sin\left(5\frac{\pi}{L}x\right)+\cdots\right\}=\frac{8A}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\sin\left[\frac{(2n+1)\pi}{L}x\right]$$

5-3 上問 5-2 の結果と

$$\boldsymbol{\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x,0)=\sum_{k=1}^{\infty}A_k\sin\left(k\frac{\pi}{L}x\right)}$$

とを比べて$\boldsymbol{A_k}$を$\boldsymbol{A}$により表せ.

【解】

$A_{2n}=0,\quad A_{2n+1}=\frac{8A}{\pi^2}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$

6. すべてを総合し，与えらえた初期条件と境界条件のもとで，フーリエ展開を用いた弦の横波の式を記せ.

【解】

$$f(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{8A}{\pi^2}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{L}x\right)\cos\left((2n+1)\frac{c\pi}{L}t\right)$$

弦の基準振動を重み$\frac{8A}{\pi^2}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$で加え合わせた．各基準振動が$\omega_m=\frac{2\pi c}{\lambda_m},\lambda_m=\frac{2L}{m}$の角振動数で振動する.