2. 弦を伝わる横波 (波動方程式)

ギターやバイオリンなど弦楽器の弦を伝わる横波について学ぶ

（弦の横波が従う波動方程式を求める）

弦をx軸方向に張り，y軸方向への平衡位置からの変位 $y(x,t)$ が波の量である.

波の振幅が小さく，また波形（yの関数形）の傾きも小さいとする.

弦の線密度ρ[kg/m]と，弦の張力 T[N]が，位置や時刻によらず一定とする.

弦の微小な部分$(dx = x2 - x1)$，質量 $dm = \rho\, dx$, がどのように運動するかを分析する

・ この部分はy軸方向にだけ運動すると考える.

・ この部分に加わる力は，弦の張力だけ：この部分の両側で，接線の傾きが異なるため，合力がy軸方向に生じる.

張力のy成分＝ $T\, sin\theta$,

θ＝接線がx軸となす角

・・ 接線の傾きが小さいとするから

$$sin\theta \simeq \theta \simeq tan\theta = \partial x\, y(x,t)$$

である.

・・ 合力のy成分は

$$T\, sin\theta 2 - T\, sin\theta 1 \sim T\,\{\partial x\, y(x2,t) - \partial x\, y(x1,t)\}$$

・ 運動方程式：

$$T\,\{\partial x\, y(x2,t) - \partial x\, y(x1,t)\} = (\rho dx)\,\partial tt\, y(x,t)\,,$$

右辺のxは$x1 < x < x2$，$dx \to 0$ *で* $x1 = x = x2$

・ 運動方程式の両辺を dx で割ると

$$\{\partial x\, y(x2,t) - \partial x\, y(x1,t)\}/dx \to \partial xx\, y(x,t)$$

となり

$$T\,\partial xx\, y(x,t) = \rho\,\partial tt\, y(x,t)$$

を得る．これは，位相速度

$$c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

の波動方程式に他ならない.

3. 問１

(1) $\mathrm{c} = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$

(2) $[T] = [\mathrm{M}][\mathrm{L}][\mathrm{T}]^{-2}$, $[\rho] = [\mathrm{M}][\mathrm{L}]^{-1}$, $\left[\sqrt{\frac{T}{\rho}}\right] = ([\mathrm{L}]^2[\mathrm{T}]^{-2})^{\frac{1}{2}} = [\mathrm{L}][\mathrm{T}^{-1}]$

(c)

$$\frac{\partial^2 \mathrm{y}}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \mathrm{y}}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right): \quad \text{まず,} \quad \frac{\partial y}{\partial x} \leftarrow \frac{\Delta \mathrm{y}}{\Delta x}, \left[\frac{\Delta \mathrm{y}}{\Delta x}\right] = \frac{[\Delta y]}{[\Delta x]} = \frac{[\mathrm{L}]}{[\mathrm{L}]} = 1(\text{無次元}), \quad \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\right] = \frac{\left[\frac{\Delta \mathrm{y}}{\Delta x}\right]}{[\Delta x]} = \frac{1}{[\mathrm{L}]}$$

4　弦を伝わる波のエネルギー　1

横波が来ると，弦が横方向に振動する.

横波がサイン波のとき，弦の一部は単振動する.

この単振動のエネルギーを求める.

弦を張った方向をx軸とする.

$x \sim x + dx$ の部分がx軸と直交するy軸方向に振動し，変位を $y(x, t)$ とする.

弦の密度を，単位長さあたり　ρ　とする（ρは線密度，単位は［kg/m］）.

この部分の

運動エネルギー $= (1/2)$ (質量)×（速度）^{2} $= \frac{1}{2}(\rho\, dx)\, (\partial t\, y)2$

位置エネルギー ＝ 張力がする仕事

この仕事は「張力 T ×弦の伸び ds」と表せる.

弦が横波の形に変形して伸びた量

$$ds = (dx2 + dy2)1/2 - dx$$
$$= dx\,\{1 + (\partial x\, y)2\}1/2 - dx$$
$$\sim dx\,\{1 + \frac{1}{2}(\partial x\, y)2\} - dx$$
$$= \frac{1}{2}(\partial x\, y)2dx$$

近似計算（～）には，テーラー展開による 1 次近似，

$$(1+z)^{\frac{1}{2}} \sim 1 + \frac{1}{2}z$$

を用いた.

張力がする仕事 $= T \times ds = T \times \frac{1}{2}(\partial x\, y)2dx$

位置エネルギー $= \frac{1}{2}T\, (\partial x\, y)2dx$

dx の部分がもつ力学的なエネルギー ＝　運動エネルギー ＋ 位置エネルギー

$$= \frac{1}{2}(\rho\, dx)\, (\partial t\, y)\ 2 + \frac{1}{2}T\, (\partial x\, y)2dx$$

5　問 2

(i) ②の部分が移動する速さ（波のエネルギーが移動する速さ）：c

(ii) y 方向の変位の速さ：$u=\frac{\partial y}{\partial t}=\frac{A}{L}c$，$dx$に含まれる質量: $dm=\rho dx$，運動エネルギーは$\frac{1}{2}(dm)u^2=\frac{1}{2}\left(\frac{Ac}{L}\right)^2\rho dx$

(iii) $|x|\ll 1\to\sqrt{1+x}\simeq 1+\frac{1}{2}x$より，$\sqrt{L^2+A^2}-L=L\sqrt{1+\left(\frac{A}{L}\right)^2}-L\simeq L\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{A}{L}\right)^2\right)-L=\frac{1}{2}\frac{A^2}{L}$

(iv) 長さLに対する伸びが$\frac{1}{2}\frac{A^2}{L}$だから，dxに対する伸びは$\left(\frac{1}{2}\frac{A^2}{L}\right)\left(\frac{dx}{L}\right)$. 位置エネルギーは$T\left(\frac{1}{2}\frac{A^2}{L}\right)\left(\frac{dx}{L}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{A}{L}\right)^2 Tdx$

(v) 波の速さが$\mathrm{c}=\sqrt{T/\rho}$となるので$\frac{1}{2}\left(\frac{Ac}{L}\right)^2\rho dx=\frac{1}{2}\left(\frac{A}{L}\sqrt{T/\rho}\right)^2\rho dx=\frac{1}{2}\left(\frac{A}{L}\right)^2\frac{T}{\rho}\rho dx=\frac{1}{2}\left(\frac{A}{L}\right)^2 Tdx$

(vi) ①③ではエネルギーが 0 となり，②では

$$\frac{\partial y}{\partial t}=\mathrm{c}\frac{\mathrm{A}}{L},\ \frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{A}{L}\quad\to\frac{1}{2}\left\{\rho\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2+T\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right\}dx=\frac{1}{2}\left\{\rho\left(c\frac{A}{L}\right)^2+T\left(\frac{A}{L}\right)^2\right\}dx=\frac{1}{2}\left(\frac{A}{L}\right)^2(\rho c^2+T^2)dx$$

となる．最右辺の第１項が弦の運動エネルギー，第２項が位置エネルギーである．両者は等しいので，エネルギーを$\left(\frac{A}{L}\right)^2\rho c^2dx$あるは$\left(\frac{A}{L}\right)^2 T^2dx$と書いてもよい．

6 サイン波のエネルギー密度

サイン波

$$y = A\,cos(kx - \omega t)$$

では

$$\partial t\, y = \omega A\, sin(kx - \omega t)$$

$$\partial x\, y = -\, kA\, sin(kx - \omega t)$$

エネルギー密度 u は

$$u = \frac{1}{2}\{\rho(\partial t\, y)\,2 + T\,(\partial x\, y)\,2\,\} = \frac{A2}{2}\{\,\rho\omega 2 + T\,k2\}\,sin2\,(kx - \omega t)$$

ここで

$$\rho\omega 2 + T\,k2 = \rho\omega 2 + (\rho v2)(\omega/v)2 = 2\rho\omega 2$$

よって

$$u = \rho\omega 2\, A2\, sin2\,(kx - \omega t)$$

エネルギー密度の時間平均

$$\langle u \rangle = \frac{1}{2}\rho\omega 2\, A2$$

7 問３

(i) $\omega = \sqrt{k/m}$

(ii) $x(t) = A\cos\omega t$，$v(t) = -\omega A\sin\omega t$

(iii) $K(t) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2\omega t$, $V(t) = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2\omega t$

(iv)$E = K(t) + V(t) = \frac{1}{2}kA^2\cos^2\omega t + \frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2\omega t = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv^2 =$ 時間的に変化しない

(v)$\langle \mathrm{K} \rangle = \frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2\omega t = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}m\omega^2A^2$,　$\langle \mathrm{V} \rangle = \frac{1}{4}kA^2 = \frac{1}{4}m\omega^2A^2 = \langle \mathrm{K} \rangle$,

$E \underbrace{=}_{\substack{\text{時間的に一定}\\\text{だから平均しても}\\\text{同じ値になる}}} \langle E \rangle = \langle \mathrm{K} + \mathrm{V} \rangle = \langle \mathrm{K} \rangle + \langle \mathrm{V} \rangle = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 = \frac{1}{2}kA^2$: 振幅の 2 乗に比例，振動数の 2 乗に比例

(vi)　サイン波のエネルギー密度　$\langle u \rangle = \frac{1}{2}\rho\omega^2A^2$に微小な長さ$dx$をかけ，その内部のエネルギー

$$dE = \langle u \rangle\ dx = \frac{1}{2}\rho dx\,\omega^2A^2 = \frac{1}{2}\,dm\ \omega^2A^2$$

となり，(v)の力学的エネルギーEとまったく同じになる．弦の１カ所に注目すると，その部分は単振動を行うのだから当然の結果だろう．

8　サイン波のパワー

弦にサイン波の進行波があるとき，弦のどの部分にも，単位長さあたり $< u >$ の平均的なエネルギー密度がある.
ここで,

$$< u > \ = \frac{1}{2}\rho\omega 2A2$$

であった.
波の移動とともに，このエネルギーが伝わる．その速さは波の速さに等しい.
弦の 1 点を 1 秒に通過する波のエネルギー（＝波のパワー）は,
その点の左側にある「波が 1 秒で伝わる距離 $=v\times 1$ 秒」に含まれる平均エネルギーである.
したがって，1 点を通過する波のパワーの時間平均は

$$< P > \ = \ < u > c \ = \frac{1}{2}\rho\omega 2A2\ c$$

波の速さは

$$c \ = \ \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

と書けるので

$$< P > \ = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2\sqrt{\frac{T}{\rho}} = \frac{1}{2}\sqrt{T\rho}\ \omega^2 A^2$$

9　固定境界条件

自由端では弦に力が働かず，弦は伸び縮みしない.
弦の伸びは

$$\left(dx2\ +\ dy2\right)^{\frac{1}{2}} - dx\ =\ dx\{(1\ +\ (\partial xy)2)1/2\ -\ 1\}\ =\ dx\frac{1}{2}(\partial xy)2$$

だから，自由端では

$$(\partial xy)2 =\ 0 \qquad \rightarrow \qquad \partial xy\ =\ 0$$

となる.

「自由端では常に，横波の接線の傾きが 0 となる」

この条件を満たす波は，数学的には，つぎのように作り出すことができる.

１．自由端をもたない無限に長い弦を考える

２．左側から自由端に向かう入射波に対し，まったく同じ振幅をもつ波を，右から入射させる

３．ふたつの波の振幅を，自由端で同じになるように重ね合わせると，自由端を原点とする偶関数の波になる.

４．どんな偶関数も原点で傾きが 0 だから，条件が満たされる.

５．自由端の左側では，どちらの波も波動方程式の解だから，重ね合わせたものも解である.

６．自由端の左側で，左に進む波が，自由端で生じた反射波である.

10 問４

単一振動数の定在波は，その振動数のサイン波の進行波を両向きに重ねてつくる．
そのとき定在波の形は

$$A\,cos(kx)\,cos(\omega t)$$

となることを既に学んだ．
ここでは，$x = 0$ で振幅が常に 0 となるので，座標原点を適切に選びなおして

$$A\,sin(kx)\,cos(\omega t)$$

と書くと，
$x\ =\ 0$ で常に振幅が0　となる．時間波形は時間の原点をとりなおして$sin(\omega t)$ としてもかまわない．
つぎに，$x\ =\ L$ で振幅が常に 0 となるためには，k　は任意の値ではなく，

$$k\,L\ =\ \pi \times n,\quad n\ =\ 1,\,2,\,3,\ \ldots$$

となる．したがって

$$kn\ = \frac{2\pi}{\lambda}\quad =\ n\frac{\pi}{L}$$

が弦に立つ波の波数に対する条件となる．
波長の条件として書き直すと

$$\lambda n\ =\ 2\frac{L}{n}$$

振動数の条件として書き直すと

$$\nu n\ = \frac{c}{\lambda n} = \frac{c}{2L}\ \times n\quad = \frac{n}{2L}\ \times\ \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

となる．
長さＬ，両端固定の弦が，単一の振動数で共鳴するときは，これらのとびとびの振動数に限られる．
振動数 $\nu 1$ の波を　**基本波**，　νn を**第$\boldsymbol{n}$高調波**（n倍波ともいう）という．
それぞれの単一振動数の波の波形を，この弦の基準振動モードという．
基準振動モードは，弦が共鳴する１つの振動数における定在波の波形であり，節と腹がある．

11　自由境界条件

自由端では弦に力が働かず，弦は伸び縮みしない.

弦の伸びは

$$\left(dx2 + dy2\right)^{\frac{1}{2}} - dx = dx\{(1 + (\partial xy)2)1/2 - 1\} = dx\frac{1}{2}(\partial xy)2$$

だから，自由端では

$$(\partial xy)2 = 0 \qquad \rightarrow \qquad \partial xy = 0$$

となる.

「自由端では常に，横波の接線の傾きが 0 となる」

この条件を満たす波は，数学的には，つぎのように作り出すことができる.

１．自由端をもたない無限に長い弦を考える

２．左側から自由端に向かう入射波に対し，まったく同じ振幅をもつ波を，右から入射させる

３．ふたつの波の振幅を，自由端で同じになるように重ね合わせると，自由端を原点とする偶関数の波になる.

４．どんな偶関数も原点で傾きが 0 だから，条件が満たされる.

５．自由端の左側では，どちらの波も波動方程式の解だから，重ね合わせたものも解である.

６．自由端の左側で，左に進む波が，自由端で生じた反射波である.

12　問５

反射波を決める条件は：入射波と反射波の重ね合わせは，$x = 0$における接線の傾きが 0 となる.

(i) 左に進むサイン波は$h_L(x,t) = A\cos(kx + \omega t + \phi)$と表せる.

$$\frac{\partial}{\partial x} f_R(x,t) = -kA\sin(kx - \omega t)\,,\quad \frac{\partial}{\partial x} h_L(x,t) = -kA\sin(kx + \omega t + \phi)$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial x} f_R(x,t)\right|_{x=0} + \left.\frac{\partial}{\partial x} h_L(x,t)\right|_{x=0} = 0 \to -kA\sin(-\omega t) = kA\sin\omega t = -(-kA\sin(\omega t + \phi)) \to \phi = 0$$

$$f_L(x,t) = \mathrm{A}\cos(kx + \omega t)\,,$$

$$f = f_R + f_L = A(\cos(kx - \omega t) + \cos(kx + \omega t)) = 2A\cos kx\cos\omega t$$

(ii) 左に進むサイン波は$h_L(x,t) = A\sin(kx + \omega t + \psi)$と表せる.

$$\frac{\partial}{\partial x} g_R(x,t) = kA\cos(kx - \omega t)\,,\quad \frac{\partial}{\partial x} h_L(x,t) = kA\cos(kx + \omega t + \psi)$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial x} g_R(x,t)\right|_{x=0} + \left.\frac{\partial}{\partial x} h_L(x,t)\right|_{x=0} = 0 \to kA\cos(-\omega t) = kA\cos\omega t = -(kA\cos(\omega t + \psi)) \to \psi = \pi$$

$$g_L(x,t) = -\mathrm{A}\sin(kx + \omega t)$$

$$g = g_R + g_L = A(\sin(kx - \omega t) - \sin(kx + \omega t)) = -2A\cos kx\sin\omega t$$

13　弦の基準振動モード

単一振動数の定在波は，その振動数のサイン波の進行波を両向きに重ねてつくる.
そのとき定在波の形は

$$A\,cos(kx)\,cos(\omega t)$$

となることを既に学んだ.
ここでは，$x = 0$ で振幅が常に 0 となるので，座標原点を適切に選びなおして

$$A\,sin(kx)\,cos(\omega t)$$

と書くと，
$x = 0$ で常に振幅が 0 となる．時間波形は時間の原点をとりなおして $sin(\omega t)$ としてもかまわない.
つぎに，$x = L$ で振幅が常に 0 となるためには，k は任意の値ではなく，

$$k\,L = \pi \times n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

となる．したがって

$$kn = \frac{2\pi}{\lambda} = n\frac{\pi}{L}$$

が弦に立つ波の波数に対する条件となる.
波長の条件として書き直すと

$$\lambda n = 2\frac{L}{n}$$

振動数の条件として書き直すと

$$\nu n = \frac{c}{\lambda n} = \frac{c}{2L} \times n = \frac{n}{2L} \times \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

となる.
長さＬ，両端固定の弦が，単一の振動数で共鳴するときは，これらのとびとびの振動数に限られる.
振動数 $\nu 1$ の波を **基本波**，νn を**第n高調波**（n倍波ともいう）という.
それぞれの単一振動数の波の波形を，この弦の基準振動モードという.
基準振動モードは，弦が共鳴する１つの振動数における定在波の波形であり，節と腹がある.

14 問６

1 (a) 図略

(b) $\nu_0 = \frac{c}{2L}$より，弦長が 2 倍（半分）になると基本振動数が $1/2$ の 60 Hz（２倍の 240 Hz）になる.

2 (a) 図略

(b) (i)振幅は，両端と中央で 0，端から $1/4$ および $3/4$ だけ離れた位置で逆位相・最大）となる．サイン関数の１周期分.

(ii)左半分と右半分では位相が 180°異なり，それぞれの中ではどの位置の位相差も 0 である.

3. 両側が固定端の弦の中央付近に腹がある振動モードは，基本振動の次が（第二高調波はなくて）第三高調波となるから.

15　問 7

$f_1 = \frac{c}{\lambda_1} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$　より　$\rho = \frac{T}{(2Lf)^2} = \frac{50}{(2\times 0.33\times 440)^2} \simeq 6\times 10^{-4}$ kg/m

220 mm

16 両側が固定端の弦の波動方程式の解

両端が固定されている，長さ L の弦[0, L]には（基準モード以外に）どのような波が立つのか，
波動方程式

$$\partial xx\, y - \frac{1}{c2}\partial tt\, y = 0$$

に基づいて考える.
固定端の条件を満たす基準振動モードの解

$$yn = An\, sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) cos\left(\omega n\, t\right), \quad \omega n = c\, kn = 2\pi\frac{c}{\lambda n} = n\,\pi\frac{c}{L}$$

の重ね合わせで一般的な解が求まると考える.
「一般的な解をフーリエ展開すると基準振動モードになる」と考え

$$y = \Sigma\, yn$$

とする.
どのフ-リエ成分も固定端条件を満たすので，それらの重ね合わせである yも固定端条件をみたすし，
どの成分も波動方程式を満たすので，yも波動方程式の解であることが保証される.
各成分の係数（振幅） An はどのようにして決まるかを考える.
時刻 $t = 0$ において時間を含む項が $cos0 = 1$ となるので

$$\boldsymbol{y}(x,\, 0) = \Sigma\, yn(x,\, 0) = \Sigma An\, sin\,(n\pi x/L)$$

すなわち，$t = 0$における弦の形 $y(x,\, 0) = g(x)$ が与えられると，そのフーリエサイン級数の係数として Anが求まる：

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\ sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\, dx$$

$y(x,\, 0) = g(x)$ を初期条件といい，$y(t, 0) = y(t, L) = 0$ を境界条件という.
ある時刻に弦の特定の箇所をつまみあげ，静かに放すときの音色（どのような振動数成分がどれだけ含まれるか）は
つまむ位置で異なる．最初の三角形の波形をフーリエ展開すると，音色が分かる.
実際，弦の中央付近をつまんだときにくらべ，端の法をつまんだほうが，短い波長成分が多く含まれるので，高い振動数成分がふくまれて
硬い音になる.