波の干渉

- 進行波と定在波
- さまざまな波形の周期的な波
- うなり
- ホイヘンスの原理
- 回折と干渉

進行波と定在波

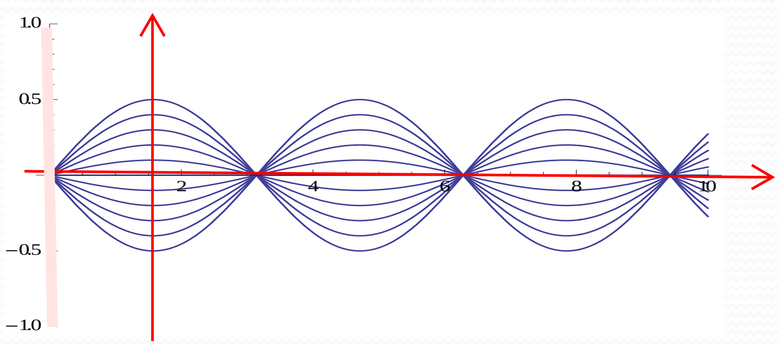
(2013 PSL 07 進行波と定在波.nb)

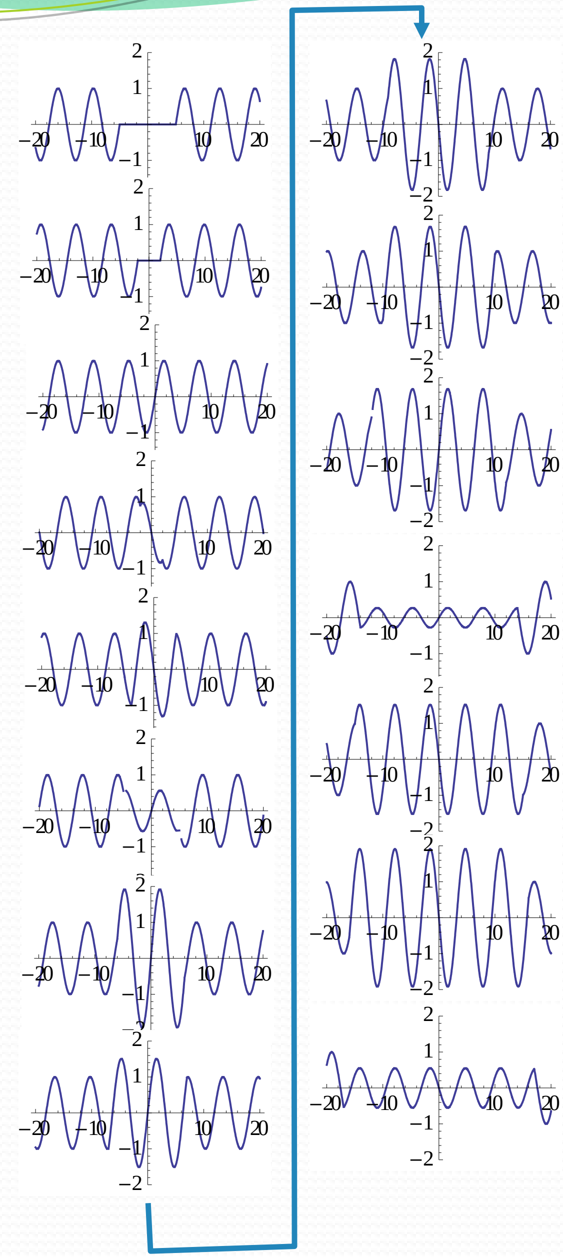
- 逆向きの進行波の重ね合わせ
  - サイン波：振幅，振動数，波長が同じ

    $A\cos(kx-\omega t)+A\cos(kx+\omega t)$

    $=2A\cos kx\times\cos\omega t$

    - 各位置の振幅をつなげる： $2A\cos kx$
    - どの位置もおなじ位相で振動： $\cos\omega t$
  - 波のパターンは同じ位置に留まる





問1

- $f_1(x,t) = A\sin(kx - \omega t)$ と $f_2(x,t) = A\sin(kx + \omega t)$ を重ね合わせたときの波形を求め，その波の様子を説明せよ．

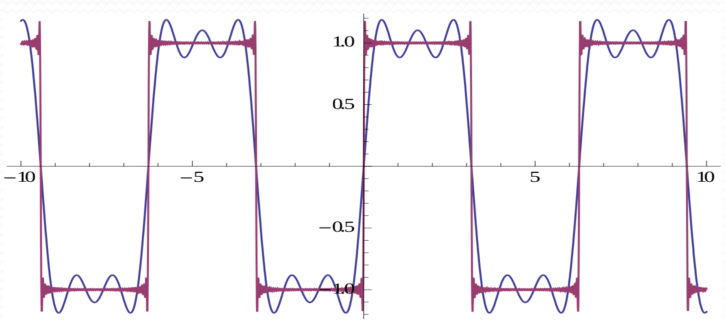
さまざまな波形の周期的な波

(2013 PSL 07 矩形波解.nb)

- 波動方程式 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$ の解$g(x-ct)$は波
- たとえば，振幅A, 波数 k の矩形波はサイン波の重ね合わせで表せる（フーリエ級数）

$$g(x-ct) = A \cdot \frac{4}{\pi}\left\{\sin(kx-\omega t) + \frac{1}{3}\sin(3kx-3\omega t) + \cdots\right\}$$

$$= A \cdot \frac{4}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2j-1}\sin((2j-1)\times(kx-\omega t))$$



うなり
beat

- **振動数・波数が異なり，同じ振幅のサイン波の重ね合わせると**

$$\cos\theta_1 + \cos\theta_2 = 2\cos\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)$$

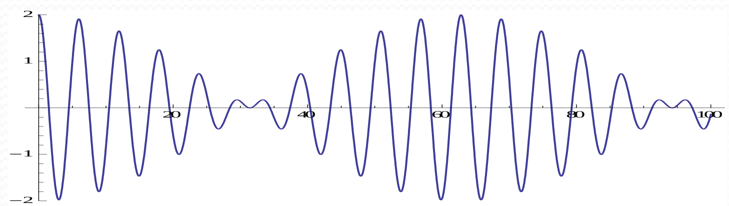
$$A\cos(k_1x-\omega_1t) + A\cos(k_2x-\omega_2t)$$
$$= 2A\cos\left(\frac{k_1-k_2}{2}x - \frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)\cos\left(\frac{k_1+k_2}{2}x - \frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)$$

- $k_1 \simeq k_2, \omega_1 \simeq \omega_2$**のとき**

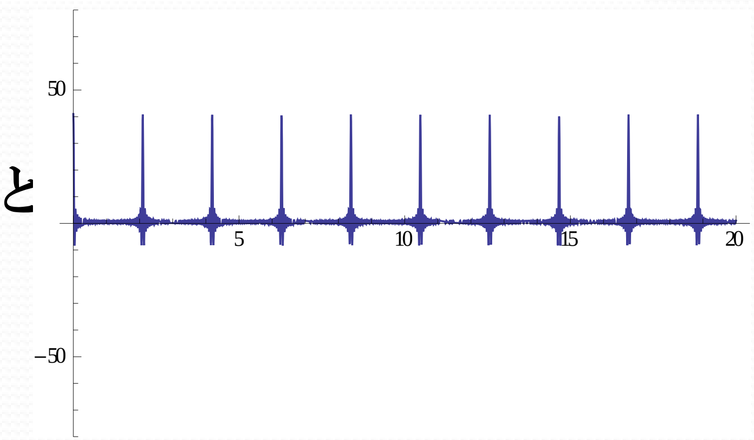
  搬送波の振動数 $\frac{\omega_1+\omega_2}{2} \simeq \omega_1 \simeq \omega_2$

  振幅変調 $\cos\left(\frac{k_1-k_2}{2}x - \frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)$

  うなりの振動数 $\frac{\omega_1-\omega_2}{2} \times 2 = \omega_1 - \omega_2$



- **振動数が等間隔のサイン波を重ね合わせると するどいパルス列になる**



問2

(1) ν_1=400 Hzの音叉と，それよりわずかに低い振動数ν_2の音叉を同時に鳴らすと，T =1秒ごとに音が大きくなった．もうひとつの音叉の振動数を次の手順で求めよ（まず一般的な式をつくり，つぎに具体的な数値を入れて計算する）．

- 各振動を$f_1(t) = Ae^{i\omega_1 t}$，$f_2(t) = Ae^{i\omega_2 t}$の形に表し，$f = f_1 + f_2 = [\quad] \times e^{i\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)t}$の形にまとめよ．
- $\mathrm{Re}[f] = \mathrm{Re}[f_1 + f_2]$を求めよ(これが，観測される音波＝圧力あるいは密度の変位)．Aは実数とする．
- $\mathrm{Re}[f]$のグラフの概略を描け．$\omega_1 \simeq \omega_2$とする（題意の数値だと特徴を表現しにくいので適宜設定）．
- $\mathrm{Re}[f]$が（正負いずれの場合でも）大きいと音が大きい．$\omega_1 \simeq \omega_2$として音の大きさの周期Tを求めよ．
- 題意の数値を用いてν_2の値を求めよ．

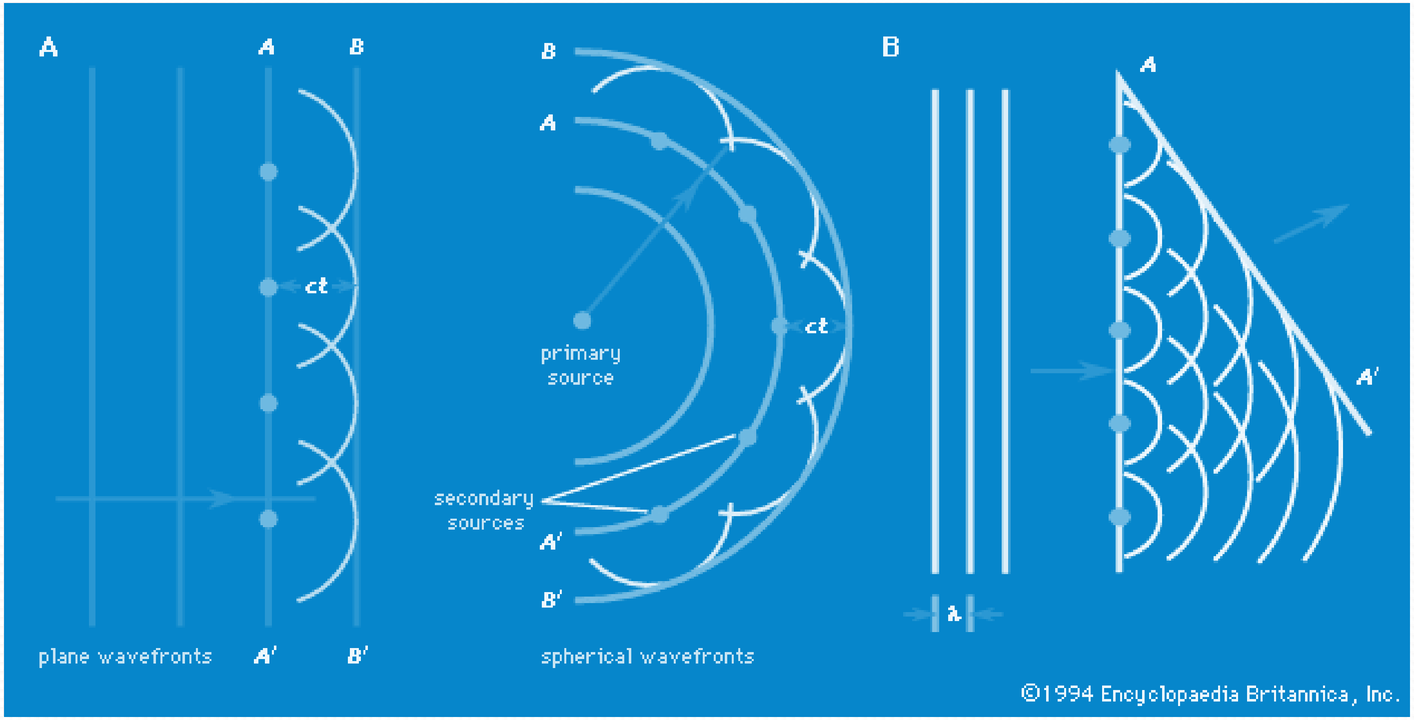
(2) 同じ速さで伝わる2つの波$\left(\frac{\omega_1}{k_1} = \frac{\omega_2}{k_2} = c\right)$，$A\cos(k_1 x - \omega_1 t)$と$A\cos(k_2 x - \omega_2 t)$を重ね合わせると，

$$f(x,t) = 2A\cos\left[\frac{1}{2}(k_1 - k_2)x - \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t\right] \times \cos\left[\frac{1}{2}(k_1 + k_2)x - \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t\right]$$

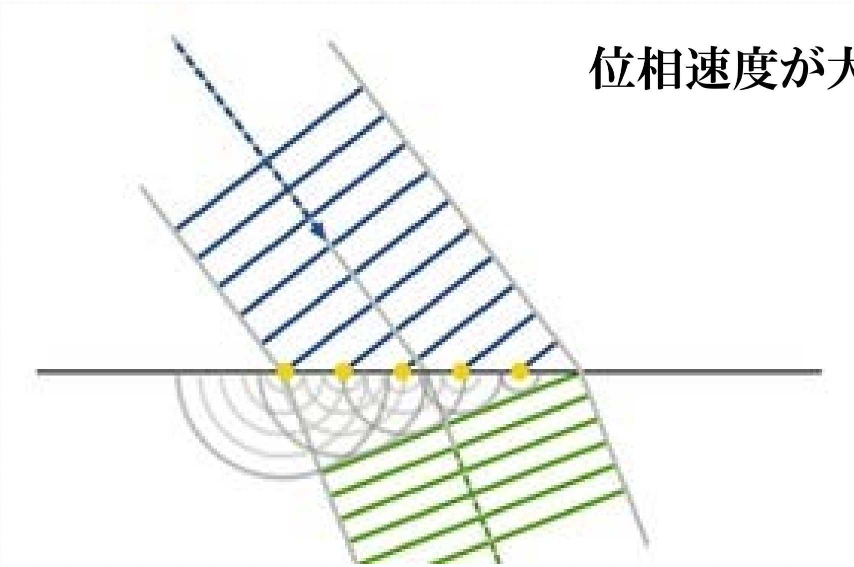
となる．信号波形　$\cos\left[\frac{1}{2}(k_1 - k_2)x - \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t\right]$が伝わる速さを求めよ．

ホイヘンスの原理
Huygens–Fresnel principle

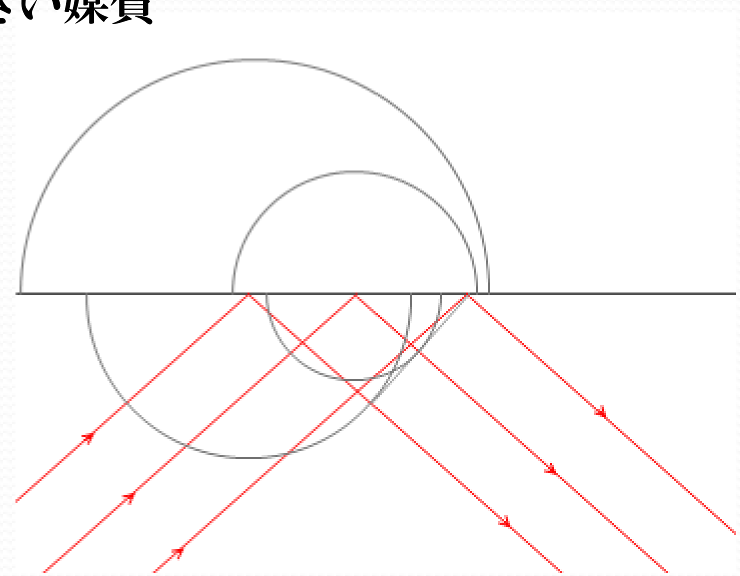
- 進行波の波面の各点が2次波の波源となり、全体としての進行波は（既に伝播した媒質から生じる）全ての2次波を重ね合わせたものとなる



ホイヘンスの原理（屈折，全反射）
refraction, total reflection



位相速度が大きい媒質



位相速度が小さい媒質

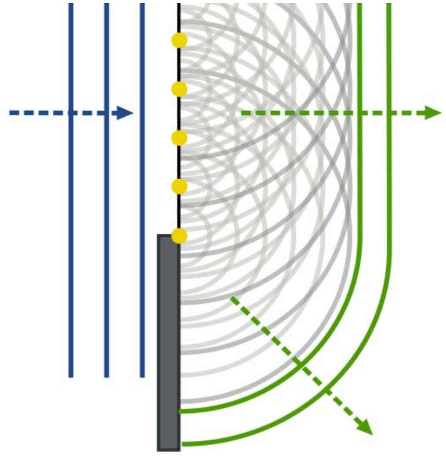
問3

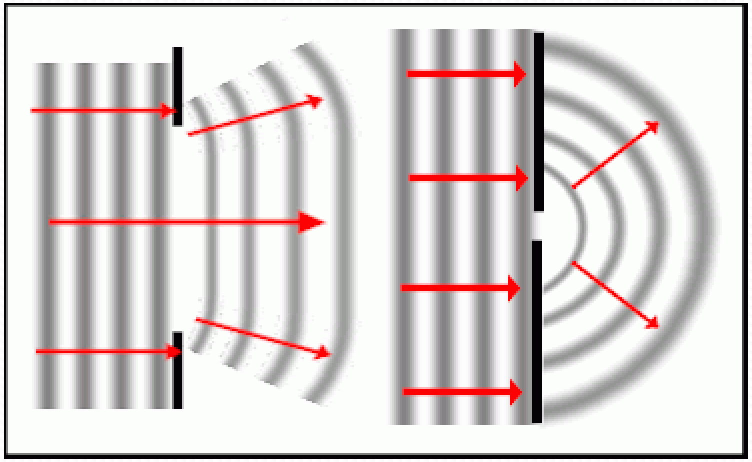
一直線上に波源が並んでいる．直線上で1波長分だけ離れた2つの波源の位相差がπのとき，波が進む向きと直線のなす角はどれだけか．ホイヘンスの原理を用いて推定せよ．

回折
diffraction

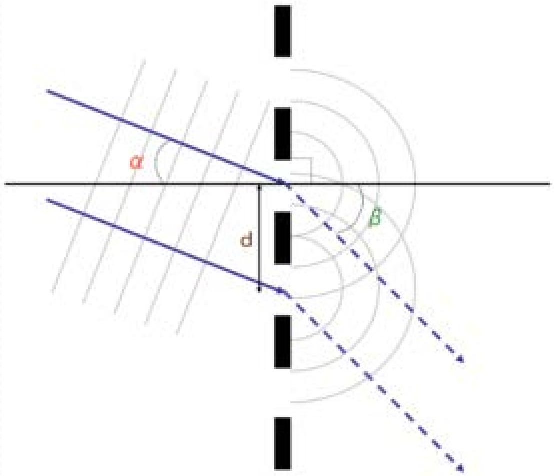
回折とホイヘンスの原理

障壁の後ろに波が回り込む





波長に比較して開口が大きいとき，小さいとき



多重スリットによる回折