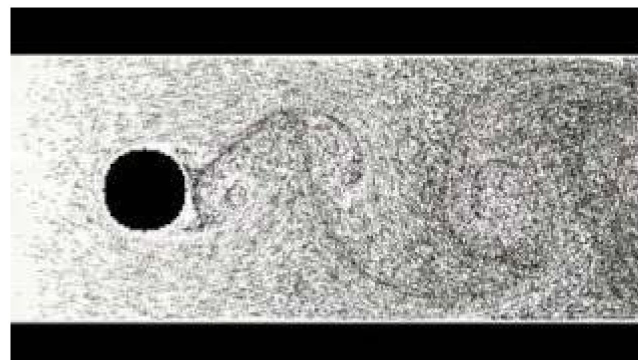
強制振動



復元力＋摩擦＋周期的な外力

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - c\frac{dx}{dt} + F_0 \cos\omega t \quad \rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = K_0 \cos\omega t$$

$$\frac{d^2\tilde{x}}{dt^2} + \gamma\frac{d\tilde{x}}{dt} + \omega_0^2 \tilde{x} = K_0 e^{i\omega t}$$

定常解の複素振幅: $(-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2)\underbrace{\tilde{A}e^{i\omega t}}_{\tilde{x}} = K_0 e^{i\omega t}$

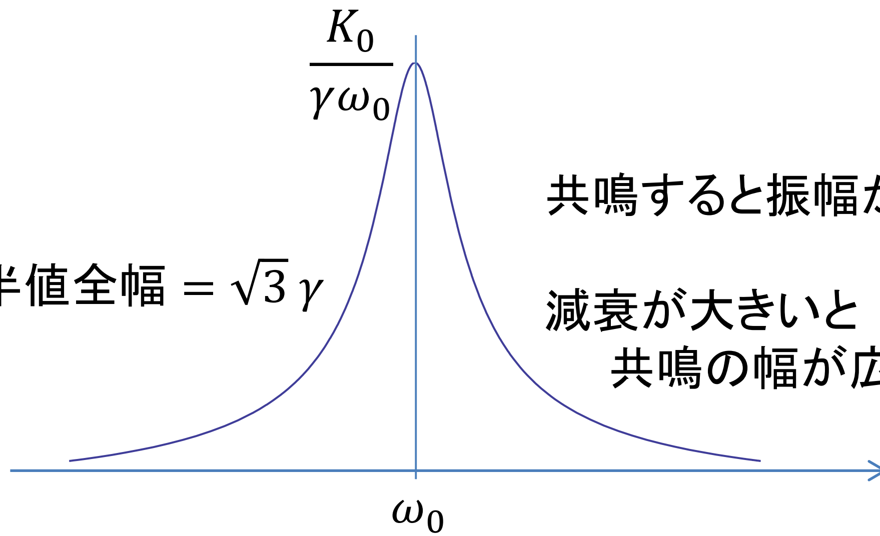
$$\tilde{A}(\omega) = \frac{K_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} \underbrace{\simeq}_{\omega\simeq\omega_0} \frac{\frac{K_0}{2\omega_0}}{(\omega_0 - \omega) + i\left(\frac{\gamma}{2}\right)}$$

$$= \frac{\frac{K_0}{2\omega_0}}{\sqrt{(\omega_0-\omega)^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}} e^{-i\delta}, \qquad \tan\delta(\omega) = \frac{\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{\omega_0 - \omega}$$

定常解の振幅

$$\tilde{A}(\omega)=\frac{\frac{K_0}{2\omega_0}}{\sqrt{(\omega_0-\omega)^2+\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}}e^{-i\delta}$$

$\left|\tilde{A}(\omega_0)\right|=\dfrac{K_0}{\gamma\omega_0}\cdots$ 最大,　　　$\omega=\omega_0\pm\left(\dfrac{\gamma}{2}\right)\sqrt{3}$で最大値の$\dfrac{1}{2}$



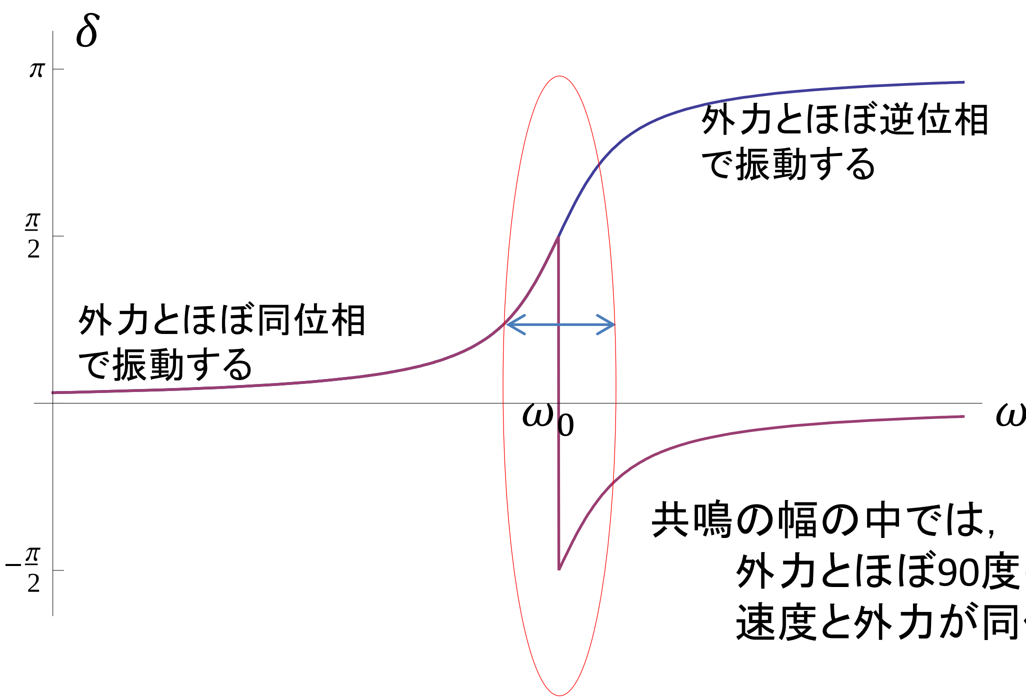
半値全幅 $=\sqrt{3}\,\gamma$

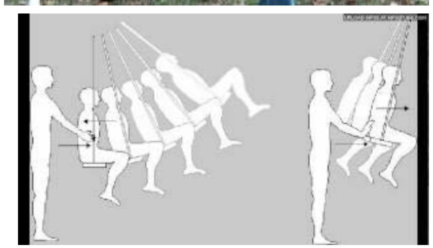
共鳴すると振幅が大きくなる

減衰が大きいと
共鳴の幅が広がり，振幅が減る

定常解の位相(*)

- $\tan\delta = \dfrac{\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{\omega_0 - \omega}$, $x = \dfrac{e^{-i\delta}}{2\omega_0\sqrt{(\omega_0-\omega)^2+\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}} K_0 e^{i\omega t}$





共鳴の幅の中では,

外力とほぼ90度の位相差で振動する

速度と外力が同位相：　速度×外力＝仕事率＞0