2. 周期運動、振動

「振動する量は何か」を明確に意識せよ.

１．水晶振動子（コーツ時計の時を刻む心臓部）

・水晶は変形すると電気が生じる（ピエゾ効果）．逆に，電圧を加えると変形する.

・水晶をある大きさにカットすると，その形に応じて特定の振動数で振動し，その振動数の交流を発生する.

・外部からその振動数の交流電圧を加えると，わずかな電圧でも共振する.

・交流電圧の振動をカウントして，秒針を進め時計とする.

・水晶振動子では，形が振動する（つり合いの位置から形がずれ．そのずれが振動する）．
同時に振動子に発生する電圧が振動する

２．振り子時計

・振り子が安定点のまわりで振動する

・振り子の振れ角が振動する，振り子の水平位置も振動する

・振れ角が小さい間は，振れ角によらず一定の振動数で振動する.

・振れ角が大きくなると，振動数が低くなる.

３．パイプオルガン

・パイプの中の空気が振動する

・空気の圧力が（大気圧を中心として）振動する

・空気の密度が振動する

４．ピストンエンジン

・エンジンのシリンダー内部で，ピストンが振動する

・ピストンの位置が振動する

3 問 1

・床面にぶつかって跳ね返る運動を繰り返すボール
　ボールの鉛直方向の座標が振動する
　横軸時間，縦軸鉛直方向の座標とすると，上に凸の放物線を切り取った形のグラフが１周期となる.
　ただし時間とともに減衰する
・除夜の鐘の音
　音の強さが振動する
　急峻な立ち上がりと，それに引き続く減衰波形で１つの周期となる.
　ただし 108 回周期目で終わる
・潮位
　水面の高さが振動する
　1 日 2 回，太陽と月と地球の位置関係により異なるパターンになる

4. 安定平衡点

１．振動運動は，安定平衡点（位置エネルギーの極小点）の付近で起きる.

２．安定平衡点から「ずれる」と，位置エネルギーが上がるので，引き戻す力＝復元力が働く

３．「ずれ」が小さいとき，位置エネルギーが「ずれ」の 2 乗に比例する

４．したがって，復元力は「ずれ」に比例する（フックの法則）

３．復元力が大きいほど安定平衡点に向かう加速度が大きい

４．質量が大きいほど加速度が小さい

５．$F = kx$ により　質量 m が振動するとき，振動数は $\sqrt{\frac{k}{m}}$ に比例する.

5. 問２

(1)
左：バネの復元力，床面からの力（垂直抗力と摩擦力），空気からの浮力と抵抗，地球が引く力（重力），（他の天体からの力・・・
中：糸の張力，重力，空気からの浮力と抵抗，
右：球面から受ける力（垂直抗力と摩擦力），重力，空気からの浮力と摩擦力

(2) 力学的エネルギーの保存則とは，
物体に加わる力が，物体の位置の関数として決まり（時刻や物体の速度・加速度によらない），さらにその力がする仕事が移動の始点と終点だけにより決まるとき，この力を保存力という．
保存力に抗して物体を２点間で移動するときに必要なエネルギーが，2 点間の位置エネルギーの差である．
物体を質量mの質点とし，速度の大きさをvとすると，その運動エネルギーは $\frac{m}{2}v^2$である．
保存力による運動では，どんなときにも

力学的エネルギー＝運動エネルギー＋位置エネルギー＝一定

となる．この等式を力学的エネルギー保存則という．

位置エネルギーは，その保存力がなす仕事（保存力×移動距離）の符号を反転したものだから，位置エネルギーの傾斜の符号を反転すると，その力が得られる．従って，物体の位置xの関数として表した位置エネルギー$V(x)$のグラフの傾斜から，物体に加わる力を読み取ることができる．たとえば，$\frac{d}{dx}V(x)=0$の位置は，物体に力が作用しない平衡点である． $V(x)$のグラフに，力学的エネルギーが一定であることを表す水平線を重ねて描く．$V(x)$が水平線より<u>上側</u>の領域では$\frac{1}{2}mv^2<0$となるので，物体がこの領域で運動することはない．$V(x)$が水平線より<u>下側</u>の領域では，$\frac{1}{2}mv^2>0$であり，運動が実現する．さらに，$V(x)$の値が小さいほど$\frac{1}{2}mv^2$が大きく，速さも大きい．安定平衡点では$V(x)$のグラフは下に凸の曲線なので，安定平衡点で最速となりその両側で遅くなる．このことは，安定平衡点の両側で力（したがって加速度）が平衡点を向くということと同じ内容である．水平線と$V(x)$のグラフが交わる点では速度が 0 となり，速度の方向が逆転してもとに戻っていく転回点である．

6. 振動を記述する（１）

Ａ．物体が振動運動する様子を記述するには:

１．いつ（t）　どこ (x)にいたかを記す必要がある： $x(t)$

時計と物さしを用意し，時間原点と座標原点を決める

２．$x(t)$ を時間で微分すると速度： $v(t) = \frac{dx}{dt}$

$v(t)$ を時間で微分すると加速度： $a(t) = \frac{dv}{dt}$

３．加速度は（ニュートンの運動法則により）力に比例する.

振動運動の加速度に注目すると，力の性質を知ることができる.

Ｂ．水平な床面でバネの片端を固定し，他端に物体をとりつけ，バネの自然長からずらして離すと，バネの復元力により振動運動をする

１．バネの「自然長からの伸び」は，バネの歪みを表す量である.

２．自然長のときの物体の位置を原点にとると，バネの歪みの量（のび）と物体の座標が一致する：x

３．バネの復元力は，歪みが小さいとき，歪みに比例する.

復元力： $F = - k\,x$ （x が正→伸びた　→　力が負→原点に向く）

Ｃ．運動方程式

$$m\frac{d2x}{dt2} = -k\,x$$

7. 振動を記述する（２）

バネの復元力で振動する物体の位置を記録する

横軸に時間をとり，縦軸に物体の位置（バネの歪みの量）をとると，　サイン曲線.

さまざまな振動を互いに区別するための量

１．振幅：

- 振れ幅，歪みの最大値，普通は片側の振れ幅を言う．記号はAを使うことが多い.
- 単位は振動する量の単位．たとえば，おもりの上下運動なら，単位は m.

２．周期：

- 周期運動がちょうど一回（１サイクル）行われるのに必要な時間.
- 記号はTを使うことが多い.
- 単位は s

３．振動数：

- １秒に何サイクル振動するかを表す量.
- 記号はfあるいはギリシャ文字のニューν,
- 単位は Hz

４．角振動数：

- 1 サイクルの振動を2πラジアンとしたときの振動数.
- 記号はギリシャ文字のオメガω,
- 単位は　rad/s

基本的な関係式

$$T = 1/f,\quad \omega = 2\pi f,\quad \omega = 2\pi/T$$

8 問 3

振幅：振動する量の中央位置と端の間の大きさ

振動数：１秒間に往復する回数

角振動数：振動数の２π 倍，１回の往復を角度 2π の変化と読む.

周期：１往復に要する時間

振幅は他の量と独立に決まる.

振動数＝1/周期

角振動数＝２π×振動数

9. 単振動

復元力：物質が変形したとき，もとに戻ろうとして発生する力.

歪み：物質が自然な状態から変形した量，例：バネの伸び

応力：復元力のこと

フックの法則：　応力が歪みに比例する　$F = -kx$

歪みが非常に小さければ常に成り立つ.

安定平衡点付近の位置エネルギーが歪みの 2 乗に比例する

フックの法則に従う復元力で運動する物体は，単振動する

単振動：　物体の位置が，時間の関数として１つのサイン（あるいはコサイン）関数で表される

物体の速度も，時間のコサイン関数

物体の加速度も，時間のサイン関数　$a = -\frac{k}{m}x$

10　問４

(1) x軸上を単振動する物体の位置は，一般に

$$x(t) = A\,sin(\omega t + \varphi)$$

と書ける．運動方程式は加速度と力の関係を記述するから

２回微分して加速度を求めると

$$x'' = a(t) = -A\,\omega^2\,sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2\,x(t)$$

よって　運動方程式は

$$m\,a = F = -m\,\omega^2\,x$$

である．

(2) 符号

変位x：x軸の正の方向の変位が正

時間：　時間が経過する方向が正

速度$\frac{dx}{dt}$: dx と dt の符号が同じとき正．通常は正の時間 dt が経過する間に起きた変位 dx について計算するので，

変位が正のとき速度が正．したがって，x 軸正方向に運動する物体の速度が正．

加速度$\frac{\mathrm{d^2x}}{\mathrm{dt^2}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)$：正の速度がさらに増加するとき正，負の速度が減少するとき正．

質量：正のみ

（参考）

角度の変化：観測者から見て反時計回りが正

角速度：振動運動を回転運動の射影とみたとき，反時計回りの回転が正

11 単振動と円運動

単振動は等速円運動を真横から見たときの運動と同じ

- 原点を中心として等速円運動をする点のx, y座標は，時間の関数としてサインとコサインである（既出）
- 等速円運動の加速度は，常に円の中心を向き，同じ大きさに保たれる．

真横から見る：この加速度のx成分（あるいはy成分）が単振動の加速度となる．

等速円運動：

加速度　$a = -\omega 2\, r$,　　ベクトル $\vec{r} = (x, y)$,　　向心力：　$F = ma = -m\omega 2\, r =$ 一定

単振動：

加速度　$ax = -\omega 2\, x$、　　　　復元力:　$Fx = \mathrm{ma_x} = -m\omega 2\, x = -k\, x$

最後の式の辺辺を比較して，

単振動の角振動数　$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

12. 問５

(1) 加速度の大きさaと半径R，角速度ωの間には$a = R\omega^2$の関係がある．加速度ベクトルと，中心からの位置ベクトルが，平行逆向き．したがって，円の中心を原点とすると$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -R\omega^2\frac{\vec{r}}{r} = -\omega^2\vec{r}$，$|\vec{r}| = R$． 動方程式は

$$m\,\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -m\omega^2\,\vec{r}$$

となる.

(2) $\vec{r} = \left(x(t), y(t)\right)$とすると

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -m\omega^2x,$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -m\omega^2y$$

(3) $x(t) = A_x\sin(\omega t)$，$y(t) = A_y\sin(\omega t + \phi)$

円運動ならば，y 軸方向から見たときの振幅A_xと，x軸方向から見たときの振幅A_yが等しく，半径Rに一致する：$A_x = A_y = R$． また円運動では，y 軸方向から見て最大変位していれば x 軸方向から見ると原点にある：

$$\phi = \frac{\pi}{2} \rightarrow\ y(t) = R\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = R\cos\omega t$$

よって

$$A_x = A_y = R,\ \phi = \frac{\pi}{2}\left(\text{あるいは}\frac{-\pi}{2}\right)$$

13 単振動を表わす式

コサインを用いる理由

複素指数関数

$$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + \mathrm{i}\sin(\omega t)$$

により単振動を表す手法がよく用いられる.

これは三角関数の加法定理や微積分の煩雑さを避けるための工夫だが,

物体の位置は実数であり複素数ではない.

したがって，複素指数関数を用いて計算を行った後に，実際の位置を求めるには，複素数の実部か虚部をとることになるが，一般的な方法は実部をとることになっている.

こうしてコサイン関数が現れる．この事情を承知したうえで，最初からコサイン関数を用いることがよく行われる.

単振動

$$x(t) = A\cos(\omega t + \theta)$$

は,

１．振幅（片側）＝ A ,

単位は m　(ここでは $x(t)$　が物体の位置を表すので)

２．角振動数　＝　ω,

単位は rad/s.　時間 t と掛けて，　ωt がラジアンになる．ラジアンは無次元

振動数 $= \nu = \omega/(2\pi)$,　　　　振動の周期 $T = 2\pi/\omega$,

３．初期位相 ＝　θ

速度，加速度は時間による微分演算で求めることが出来る.

・速度の最大値は　　　ωに比例し，また振幅Aに比例して大きくなる.

・加速度の最大値は　ω2に比例し，また振幅Aに比例して大きくなる.

・位置が最大のとき，速度は 0,　加速度は最大になる

14　問６

$x(t) = A\sin(\omega t)$から出発して微分法により

$$x(t) = A\sin(\omega t) \rightarrow \quad v(t) = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t) \rightarrow a(t) = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2\sin(\omega t)$$

$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$　から出発しても同様に

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi) \rightarrow \quad v(t) = \frac{dx}{dt} = A\,\omega\cos(\omega t + \varphi) \quad \rightarrow a(t) = -A\omega^2\sin(\omega t + \varphi)$$

$a(t) = -\mathrm{A}\omega^2\sin(\omega t)$ から出発して積分法により

$$v(t) = v(0) + \int_0^t a(t)\,dt = v(0) + A\,\omega\cos(\omega t) - A\,\omega$$

$$x(t) = x(0) + \int_0^t v(t)dt = x(0) + v(0)t + A\sin(\omega t) - A\omega t$$

$a(t) = -A\omega^2\sin(\omega t + \varphi)$から出発しても同様に

$$v(t) = v(0) + \int_0^t a(t)\,dt = v(0) + A\,\omega\cos(\omega t + \varphi) - A\,\omega\cos(\varphi)$$

$$x(t) = x(0) + \int_0^t v(t)dt = x(0) + v(0)t + A\sin(\omega t + \varphi) - A\,\omega\cos(\varphi)\,t - A\sin(\varphi)$$

$$F = mg = 10\ \mathrm{kg} \times 9.8\ \mathrm{m/s^2} = 98\ \mathrm{N}$$

$$k = \frac{F}{x} = 98\frac{\mathrm{N}}{0.01\ \mathrm{m}} = 9.8 \times 10^3\ \mathrm{N/m}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{9.8 \times 10^2\ /\mathrm{s}^2} = 31\ \mathrm{rad/s}$$

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = 5.0\ \mathrm{Hz}$$

15 初期位置と初速度

単振動の角振動数 ω が分かっているとき,

ある時刻に位置と速度を測ると，振幅と初期位相が計算できる.

まず単振動を表す式：

$$x(t) = A\cos(\omega t + \theta),\ v(t) = -A\,\omega\sin(\omega t + \theta)$$

ある時刻を$t = 0$とすると）$t = 0$　における位置x_0と速度 v_0は

$$x_0 = x(0) = A\,cos\theta, \qquad v_0 = v(0) = -A\,\omega\,sin\,\theta$$

両式から（x_0, v_0, ωを既知として）Aとθを求める.

$$\frac{x_0}{A} = cos\theta, \qquad \frac{v_0}{-A\omega} = sin\,\theta$$

両式の辺々を割ると

$$\left(\frac{sin\theta}{cos\theta}\right) = \boxed{tan\,\theta = -\frac{v_0}{x_0\omega}}$$

両辺を 2 乗して足すと

$$\left(\frac{x_0}{A}\right)^2 + \left(\frac{v_0}{-A\omega}\right)^2 = 1 \ \rightarrow \ A^2 = x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2 \rightarrow \boxed{\mathrm{A} = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}}$$

となる.

以上の意味は，単振動の振動数と，ある時刻の位置と速度が分かれば，その先の運動が完全に予測できることを示しているので，重要である．ニュートンの運動法則が，$x(t)$の 2 階微分で書かれることの帰結である.

16 問 7

(1)

$$\boldsymbol{A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2} = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{2\pi}T\right)^2} = \sqrt{(2.0)^2 + \left(\frac{-3.0}{6.28}\right)^2} = \sqrt{4.23} = 2.1\ m}$$

$$\theta = \arctan\left[-\frac{-3.0}{2\pi\ (2.0)}\right] = \arctan\left[\frac{3}{4\pi}\right] \simeq 0.23\ \mathrm{rad}$$

(2)

$x_0 = \mathrm{A}\cos(\omega t + \theta) = 0$ となる最初の時刻は　$\omega t + \theta = \frac{\pi}{2}$　より

$$t = \frac{\frac{\pi}{2} - \theta}{\omega} = \frac{3.14 - 0.23}{6.28} = 0.21\ \mathrm{s}$$

17 単振動のエネルギー

波が運ぶエネルギーを考察する準備として，波の 1 箇所が「単振動」としてもっているエネルギーを数式で表す．
単振動を引き起こす復元力 $F = -k\,x$ は，物体の歪みがもつ位置エネルギー $U = \frac{1}{2}k\,x^2$ から導かれる

実際，位置エネルギー $U(x)$ の勾配が力である：

$$F = -\frac{dU}{dx} = -\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2}k\,x^2\right] = -k\,x$$

位置エネルギー U(x) が生み出す力だけによって運動する物体の力学的エネルギー（運動エネルギー＋位置エネルギー）が一定である

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k\,x^2 = E = \text{一定}$$

単振動する物体の位置が振動の中心から最も離れたとき，すなわち $x = A$（振幅） のとき，物体の速度は 0 となるから

$$\frac{1}{2}m \times 0^2 + \frac{1}{2}k\,A^2 = \frac{1}{2}k\,A^2 = E = \text{一定}$$

である．したがって

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k\,x^2 = \frac{1}{2}k\,A^2$$

この式を用いると，（運動方程式を解くまでもなく，また単振動であることを知らなくても） 各位置における速度が

$$v^2 = \frac{k}{m}(A^2 - x^2)$$

という関係から求まる．

問：最大の速度v_{max} はどの位置で実現するか？　振幅の半分の位置ではどんな値か？

[参考]
振動現象は，エネルギーが二つの異なる形態を交互にとるときに見られる
・ 運動エネルギー vs 位置エネルギー
・ 電気エネルギー vs 磁気エネルギー

18 問８

(1) 最大速度 V は原点を通過するときの速さで，このときの変位が 0 だから $\frac{m}{2}V^2 = E$ より

$$V = \sqrt{\frac{2E}{m}} = \sqrt{2 \times \frac{1\ \mathrm{J}}{3\ \mathrm{kg}}} = 0.82\ \mathrm{m/s}$$

振幅Aは最大変位の位置に等しく，このときの速度が 0 だから $\frac{k}{2}A^2 = E$ より

$$A = \sqrt{2 \times \frac{1\ \mathrm{J}}{1\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}}} = 1.4\ \mathrm{m}$$

(2) $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k\left(\frac{A}{2}\right)^2 = E = \frac{1}{2}kA^2 \ \rightarrow\ \frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2}mA^2 = \frac{3}{4}E = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2}mV^2 \ \rightarrow v = \sqrt{\frac{3}{4} \times V^2}$

$$v = \sqrt{\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}}\ \mathrm{m/s} = \sqrt{\frac{1}{2}}\ \mathrm{m/s} = 0.71\ \mathrm{m/s}$$

19　単振動の応用（１）

これまで，「水平な床面上をバネの復元力だけで振動する物体」が「単振動」を行うことを学んだ.
しかし，単振動は広範囲の振動現象に見られる.
何らかの量（物体の変位でなくてもよい）$x(t)$　が

$$\frac{d2x}{dt2} = -c\,x$$

という式に従うとき，$x(t)$は単振動する.
あるいは

$$a\,x2 + b\left(\frac{dx}{dt}\right)2 = 一定$$

という関係が成り立つとき，$x(t)$は単振動する.
２番目の式は,
「ある形のエネルギー　$a\,x2$　が別の形のエネルギー　$b\,(dx/dt)2$ に形を変える」
だが「全エネルギーは一定のまま」　「エネルギーが 2 つの形態の間を往復する」
という状況を表すとも見ることができる.
最初の例は，天井から吊したバネに物体を下げたときの運動
次の例は，時計のテンプの運動

いずれも，運動方程式をたてると，$\frac{d2x}{dt2} = -c\,x$　の形になるので，x　が単振動をすることが分かる

20 問９

(A)

(1) 自然長を原点とする運動方程式は，座標を鉛直下向きとする(重力が正方向)ので

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx + mg$$

(2) つり合いを保ち静止状態を続けるときは，左辺の加速度も 0 となる．

つり合いの位置を　x_0　とすると

$$0 = -kx_0 + mg \rightarrow x_0 = \frac{mg}{k}$$

x_0を新しい原点とする新しい座標系における位置座標

$$X = x - x_0 \qquad \rightarrow \quad x = X + x_0$$

となるから，もとの運動方程式にこれを代入し，Xについての式をつくると

$$m\frac{d^2X}{dt^2} = -k\left(X + x_0\right) + mg = -kX \qquad \rightarrow \quad m\frac{d^2X}{dt^2} = -kX$$

ただし，　x_0　が時間的に変化しないので 2 回微分も 0 となること，また，つり合い位置$x_0 = \frac{mg}{k}$を用いた．最後の式から，Xが単振動することがわかる．バネでおもりを吊り下げると，つりあいの位置を中心とした単振動をする．その角振動数は，同じバネとおもりを水平な床面で振動させたときの周期と同じ値$\sqrt{\frac{\mathrm{k}}{m}}$ である．

(B)

(1)

【慣性能率（慣性モーメント）の定義と利用】

・　回転中心から距離r のところに質量　m の質点がある

・・　慣性能率$I = mr^2$である．

・・　この質点が角速度ωで回転するとき，

・・・　角運動量は　$I\omega = mr^2\omega$,

・・・　運動エネルギーは$\frac{1}{2}I\,\omega^2 = \frac{1}{2}mr^2\omega^2$.

・　以上の内容を納得するための確認事項

・・　角運動量：$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$，$\vec{r}$と$\vec{v}$が直交するとき$|\vec{\ell}| = r \cdot m(r\omega)$,

・・　運動エネルギー：$\left(\frac{1}{2}\right)mv^2 = \left(\frac{1}{2}\right) m\,(r\omega)^2$

【円板の慣性能率】

・　考え方

・・　回転中心から距離r_1に質点m_1，距離r^2に質点m_1があり，ともに ω で回転する

・・　全体の慣性能率は$I_1 + I_2 = m_1r_1^2 + m_2r_2^2$

・　どんな物体も，剛体ならば，その全体が同じ軸のまわりに<u>同じ角速度</u>で回転する

・・　全体を細分して，各部分の慣性能率を求め，

・・　それらを寄せ集めれば全体の慣性能率が求まる．

・　計算の手順

・・直径Rの円板を「細い同心のリング」に分割し，細いリングの軸の回りの慣性能率を求める．

・・細いリングの慣性能率は，リングを細分化してできる微小部分の慣性能率を求め，それらの和をとる．

・・細いリングの内径をr，外径を $r + dr$ とする．リングをN個に分割すると，

・・・　微小部分の

・・・・　質量は$dm = \rho \times 2\pi r \times dr \times h \div N$

・・・・　慣性能率は$dI = dm \times r^2 = 2\pi\left(\frac{\rho h}{N}\right) r^3\, dr$

・・・　リング全体の慣性能率は　$N\, dI = 2\pi\rho\, h\, r^3\, dr$

・・　細いリングは，半径が$r = 0 \sim R$ で無数にある．それらを全部集めると円板の慣性能率　I　となる

$$I = \int_0^R 2\pi\rho\, h\, r^3\, dr = 2\pi\rho h \frac{1}{4} R^4 = \frac{1}{2}\pi\rho h\, R^4 \quad = \frac{1}{2}\left(\pi R^2\, h\, \rho\right) R^2 = \frac{1}{2} M\, R^2$$

ただし，Mは円板の質量．

・・　慣性能率　I の物体がトルク τ　(タウ)　を受けて運動するとき，

回転角θについての運動方程式（角運動量の時間的変化の割合 ＝ トルク）は

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = \tau$$

である．

・この問の条件下で，

$\tau = R \times 力 = R \times (-k\, R\theta) = -k\, R^2\, \theta$

となるから

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = \tau \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} M\, R^2\, \frac{d^2\theta}{dt^2} = -k\, R^2\, \theta \quad \rightarrow \frac{1}{2} M \frac{d^2\theta}{dt^2} = -k\theta$$

$$\rightarrow$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{2k}{M}\theta$$

回転角θが単振動し，その角振動数は

$$\sqrt{\frac{2k}{M}}$$

となる．

21　単振動の応用（２）

原子が結合して分子となり，それらの原子は振動している．
原子間の距離が平衡位置よりも長くなると復元力が働き引き戻される．短くなると押し戻される．
原子間の距離が変わると結合のエネルギー（位置エネルギー）が変化するのが，復元力の起源である．
この位置エネルギーも，安定平衡点のまわりで，変位の 2 次関数となる．
したがって，原子の振動は，振幅が小さいときは単振動となる．

22　問１０ (*)

分子を構成する原子の結合エネルギー（分子がバラバラの原子に分解したとき放出するエネルギー）は，原子間距rにより変化し（その距離からバラバラになるときに放出するエネルギーが，距離により異なる），安定平衡の距離r_eで最小となる.
結合エネルギーの関数形$V(r)$は，いろいろなモデルがあるが,

$$V(r) = D_e \left(1 - e^{\alpha\cdot(r - r_e)}\right)^2$$

すなわちモース・ポテンシャルと呼ぶ関数が頻繁に用いられる.

(1)原子の振動の振幅が小さいとき，すなわち$\alpha \times (r - r_e)$が非常に小さいとき，$V(r)$の近似的な関数形を求める.
それには，まずテーラー展開により指数関数を近似し

$$e^{\alpha(r - r_e)} \simeq 1 + \alpha\left(r - r_e\right)$$

となることを用い

$$V(r) \simeq D_e\, \alpha^2 \left(r - r_e\right)^2 = \frac{1}{2}\left(2\, D_e\, \alpha^2\right)\left(r - r_e\right)^2$$

とする. $\left(r - r_e\right)$は「バネの自然長からの変化」に相当するので
$2\, D_e\, \alpha^2$がバネ定数に相当
する.

(2) バネ定数$(2\, D_e\, \alpha^2)$のバネの両端に質量mのおもり（原子）が結ばれている. バネは，その中央を中心として対称に伸縮するから，<u>中央を固定端と考え，半分の長さのバネの片端に質量m</u>があるとしても同じである.
バネの長さが半分になると，バネ定数は倍になるので

$$k = 2 \times (2\, \mathrm{D_e}\, \alpha^2)$$

というバネに質量mをつないだときの単振動が起きる. その角振動数は

$$\omega = \sqrt{4D_e \frac{\alpha^2}{m}} = 2\, \alpha \sqrt{\frac{D_e}{m}}$$

となる.

23　単振り子

天井から長さℓの軽い糸で質量mのおもりを吊り下げて振り子にすると，振幅が小さいときは単振動する.
天井の固定点を中心にして，おもりの回転運動に注目する.
おもりの慣性能率：$I = m\ell^2$
おもりに加わる力のうち
・糸の張力によるトルク：0　(回転中心に向かう力だから)
・重力によるトルク：$\tau = -mg\,\ell \sin\theta$　(回転角が増える向きと逆向き、角度により異なる大きさ)

回転運動の運動方程式は一般的に

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\text{角運動量}) = \text{トルク}$$

と書ける。慣性能率を用いて角運動量を書くと

$$\text{角運動量} = I\omega = I\frac{d\theta}{dt}$$

である。したがって運動方程式は

$$I\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{dt}^2} = \tau$$

となる．運動方程式を問に即して書き直すと

$$m\ell^2\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\ell \times (mg\,\sin\theta)$$

この式を整理すると

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{dt}^2} = -\frac{g}{\ell}\sin\theta$$

となる。

振幅が小さい（したがって回転角が小さい）とき、ラジアンで表示した角度θを用いると

$$\sin\theta \simeq \theta, \quad |\theta| \ll 1$$

このとき運動方程式は

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{\ell}\,\theta$$

となる.

重力で運動する振り子は、回転角小さいとき，回転角が単振動する。その角振動数は$\sqrt{\frac{g}{\ell}}$となる.

床面に映るおもりの影の位置xは，回転角が小さいなら$x \simeq \ell\theta$となるので、影の位置も同じ角振動数で単振動する.

24　問１１

前ページの解説文を参照

25 非線形振動(*)

振幅が小さい限り，安定平衡点のまわりの振動は，ほとんどの場合に単振動となる.

単振り子の場合には，振幅が大きく（回転角が大きく）なると，トルクのサインの項はもはやθで近似することはできずθの高次の項を用いて表さなければならない.

この振り子では，振幅の増大とともに復元力が弱くなる.

大きな振幅で端まで行くと，原点に戻るための復元力が（単振動のときより）小さいので，加速度が小さくなりその結果速度がなかなか増さないので，ゆっくりと振動することになる．すなわち周期が長くなる.

振幅により周期が異なる振動は, 非線形振動という. 現実に起きる振動は, ほとんどの場合に非線形振動である.
非線形振動は，もはや単振動ではない.

26 非調和振動(*)

用語：非線形振動と同じ

27 減衰振動（１）

鐘を鳴らしたとき，徐々に音が小さくなる．これは振動のエネルギーが徐々に外部へと流れ去るからである．

このように，振動エネルギーが散逸する場合，振動運動がどのようになるかを記述する．

典型的な場合として，復元力 $F = -kx$ 以外に，速度に比例する抵抗 $R = -cv$ を受けて運動する質量m の物体の運動方程式を考える．

まず，復元力だけのときは

$$m\frac{d2x}{dt2} = -kx$$

右辺が力だから，右辺に$-cv$ を加えて

$$m\frac{d2x}{dt2} = -kx - cv$$

が運動方程式である．$-cv$ の負号は，vの向きと摩擦力が逆向きであることを表す．

速度は $v = \frac{dx}{dt}$ なので，運動方程式を x だけで表すと

$$m\frac{d2x}{dt2} = -kx - c\frac{dx}{dt}$$

微分方程式では，最高階の係数を 1 として表すのが普通なので

$$\frac{d2x}{dt2} + \frac{c}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

とする．さらに $\gamma = \frac{c}{m}$， $\omega 0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ とおいて書き直すと

$$\frac{d2x}{dt2} + \gamma\frac{dx}{dt} + \omega 02\,x = 0$$

となる．ω_0 は，摩擦がないときの単振動の角振動数である．

28 **減衰振動（２）**

運動方程式

$$\frac{d2x}{dt2} + \gamma\frac{dx}{dt} + \omega 02\, x = 0$$

は単振動によく似た解をもつ：

$$\omega 0 > \frac{\gamma}{2}$$

のときに

$$x(t) = A\, e^{-\frac{\gamma}{2}t}\, cos\Omega t$$

という形の解がある.

これを**減衰振動**といい，単振動の振幅が時間とともに指数関数的に減衰していく.

この解を運動方程式に代入すると

$$v = \frac{dx}{dt} = A\, e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left\{\left(\frac{\gamma}{2}\right) cos\Omega t + \Omega\, sin\Omega t\right\}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = A\, e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left\{\left(\left(\frac{\gamma}{2}\right)2 - \Omega 2\right) cos\Omega t + \gamma\Omega\, sin\Omega t\right\}$$

より

$$A\, e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left\{\left(\frac{\gamma}{2}\right)2 + \Omega 2 - \omega 02\right\} cos\Omega t = 0$$

が成り立つ必要がある．したがって

$$(\gamma/2)2 + \Omega 2 - \omega 02 = 0 \rightarrow \Omega = \sqrt{\omega 02 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)2}$$

でなければならない.

減衰振動の

- 振動数は，摩擦がないときの振動数$\omega 0$よりも少し低下する.
  - ・・ Ωが減衰振動する系の振動数となる.
  - ・・ 減衰振動するときでも，$\omega 0$を系の固有振動数という）
- 振幅が指数関数$e^{-\frac{\gamma}{2}t}$に従って減衰することが分かる.
  - ・・ 時間が $1/(\frac{\gamma}{2})$ だけ経過すると，振幅が $1/e$ になる.
  - ・・ 振幅が$1/e$ になる時間$2/\gamma$を，振幅の「寿命」という.

29　減衰振動（3）

ここまでは，速度に比例する摩擦を取り入れて運動方程式をつくり，その解を観察した．
もともと，振動する鐘のエネルギーが減衰していく様子に興味がある．
γが小さく，減衰がなかなか起きない（あるいは寿命の間に多数回振動する）場合を想定しよう．
このとき，ある時刻 t における系のエネルギー$E(t)$ は単振動のエネルギーと同じだと考えられるので

$$E(t) = \frac{1}{2} m\, v2 + \frac{1}{2} k\, x2$$

この式の両辺をを時間で微分すると，v や x が時間の関数だから，

$$\frac{dv2}{dt} = \left(\frac{dv2}{dv}\right)\left(\frac{dv}{dt}\right) = 2v \cdot a$$

などとなり

$$\frac{dE}{dt} = m\, v\, a + k\, x\, v = v\,(ma + kx)$$

を得る．
運動方程式

$$m\frac{d2x}{dt2} = ma = -\,k\, x - c\, v$$

を上で得た式

$$\frac{dE}{dt} = v\,(ma + kx)$$

に代入すると

$$\frac{dE}{dt} = v\,(-cv) = -\,cv2 = -\,2\left(\frac{c}{m}\right)\left\{\frac{1}{2}mv2\right\} = -2\gamma \times \textit{運動エネルギー}$$

すなわち
減衰振動する系のエネルギーの減衰の割合いは，その時刻における運動エネルギーに比例する
ことがわかる

30 強制振動と共鳴（１）

減衰振動する系は，放置すれば次第に振動が減衰していく．

この系に外部から周期的な力（駆動力）を加えると，振動が減らずに継続する．これを強制振動という．

強制振動する系は駆動力の振動数で振動する．

駆動力が供給するエネルギーの割合い（パワー）と系から逃げ出すエネルギーの割合い（パワー）が一致すると，同じ振幅が継続する．

駆動力の振動数と系の固有振動数が近くなると，振幅が非常に大きくなる（共鳴，共振）

31　強制振動と共鳴（２）

強制振動の運動方程式を作る．まず，駆動力がなければ，減衰振動の運動方程式：

$$m\frac{d2x}{dt2} = -kx - c\frac{dx}{dt}$$

となる．振動数がωの駆動力

$$F(t) = F0\, cos(\omega t)$$

が加わるとき

$$m\frac{d2x}{dt2} = -kx - c\frac{dx}{dt} + F0\, cos(\omega t)$$

が運動方程式となる.

ここで $\frac{F0}{m} = f0$ と書き，運動方程式を整理して

$$\frac{d2x}{dt2} + \gamma\frac{dx}{dt} + \omega 02\, x = f0\, cos(\omega t)$$

を得る.

この運動方程式の定常解（同じ振幅で振動し続ける解）を求めるとき，

スライドのように複素指数関数を用いると計算が楽である.

複素指数関数を用いないときは,

駆動力と同じ振動数だが異なる位相の解を仮定する.

もし同じ位相の解を仮定すると，解が存在しないと言う結論になることは簡単に計算で示せる.

定常解（実数）と駆動力との位相差をφとして，その解を

$$x(t) = A\, cos(\omega t + \varphi)$$

と仮定すると，振幅Aとωの関係が求まる：

$$\frac{dx}{dt} = -A\omega\, sin(\omega t + \varphi)$$

$$\frac{d2x}{dt2} = -A\omega 2\, cos(\omega t + \varphi)$$

を運動方程式に代入すると

$$-A\omega 2\, cos(\omega t + \varphi) - \gamma A\omega\, sin(\omega t + \varphi) + \omega 02\, A\, cos(\omega t + \varphi) = f0\, cos(\omega t)$$

となるので

$$A(\omega 2 - \omega 02)\, cos(\omega t + \varphi) + \gamma A\omega\, sin(\omega t + \varphi) = f0\, cos(\omega t)$$

$$\rightarrow$$

$$A(\omega 2 - \omega 02) cos\varphi\, cos(\omega t) - A(\omega 2 - \omega 02) sin\varphi\, sin\omega t + \gamma A\omega\, cos\varphi\, sin\omega t + \gamma A\omega\, sin\varphi\, cos\omega t = f0\, cos\,\omega t$$

$$\rightarrow$$

$cos\omega t$ の係数　：　$A(\omega 2 - \omega 02)\, cos\varphi + \gamma A\omega sin\varphi - f0 = 0$

$sin\omega t$ の係数　：　$-A(\omega 2 - \omega 02)\, sin\varphi + \gamma A\omega cos\varphi = 0$

これを$cos\varphi$と$sin\varphi$の連立方程式と見て解くと

$$cos\varphi = \frac{f0}{A}\,\frac{\omega 2 - \omega 02}{\gamma 2\omega 2 + (\omega 2 - \omega 02)2}$$

$$\sin\varphi = \frac{f0}{A}\frac{\gamma\omega}{\gamma 2\omega 2 + \left(\omega 2\ -\ \omega 02\ \right)2}$$

三平方の定理を用いると

$$\frac{\left(\frac{f0}{A}\right)\ 2}{\gamma 2\omega 2 + \left(\omega 2\ -\ \omega 02\ \right)2}\ =\ 1$$

したがって

$$A\ = \frac{f0}{\sqrt{\gamma 2\omega 2 + \left(\omega 2\ -\ \omega 02\ \right)2}}$$

駆動力の振動数が系の固有振動数に近いとき，すなわち

$\omega\ +\ \omega 0 \simeq\ 2\omega 0$

だから

$$\omega 2\ -\ \omega 02\ =\ \left(\omega - \omega 0\right)\left(\omega\ +\ \omega 0\right) \simeq 2\omega 0\ (\omega - \omega 0)$$

$$\gamma 2\omega 2 \simeq\ \gamma 2\omega 02$$

となり

A　$の$　$分母$ $=$

$$\sqrt{\gamma 2\omega 2 + \left(\omega 2\ -\ \omega 02\ \right)2} \simeq\ \sqrt{\gamma 2\omega 02\ +\ \left(2\omega 0\ (\omega - \omega 0)\right)2} \simeq\ 2\omega 0\sqrt{(\omega - \omega 0)2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)2}$$

A　の　分子 $=\ f0$

を得る.

駆動力の振幅が一定でも，その振動数が系の固有振動数に近いときは，系の振幅が大きくなる.

この状況を「系が共鳴した」という.

共鳴の幅（どの程度固有振動数から離れても大きな振幅を得るかの目安）はγ程度である.

駆動力によって系に注入されるエネルギーは，共鳴のとき大きくなり，場合によっては系が破壊される.

駆動力の位相と系の振動の位相は，駆動力の振動数によって異なる.