2．さまざまな周期運動

一つのパターンが繰り返して現れるのが周期現象である．

時間的に繰り返されるものもあるし，空間的に繰り返されるものもある．

ここでは，時間的な周期現象に注目する．ことに運動（時間的な位置の変化）が周期的な場合に注目する．

繰り返し現象の例はたくさんある．時間的周期現象の例として，たとえば
天体（惑星の公転，地球の自転，それにともなう星の動き）
分子の内部運動（回転や振動）
生命体（心臓の鼓動，脈拍，etc）
振り子，バネと質量，etc
機械装置(エンジンの運動，車の回転，ピストンの往復運動，etc)

周期運動を数学的に記述する．
位置を時間の関数として $x(t)$ と記すと，繰り返しパターンの長さが T のとき
どんな時刻 t についても，T だけ過去（未来）には同じ位置にある： $x(t) = x(t+T)$

T を**周期**という．繰り返しの 1 回に時間 T を要する．
たとえば，$T = 0.1\,s$ であれば 1s に 10 回繰り返す．10 **サイクル/秒** という．
$\nu = 1/T$ を**周波数**あるいは**振動数**という．

3 等速円運動と単振動

一定の速さで回転する円運動が，周期運動の基本であることはだれしも認めるだろう．

等速円運動をする点の xy 座標をそれぞれ観察すると，サイン関数，コサイン関数となる．

したがって，サイン関数やコサイン関数が周期運動の基本であると言ってもよいだろう．

ｘ軸からの角度をθとする．θは**反時計回り**に測る．
円周上の点の座標は

$$x = A\cos\theta, \quad y = A\sin\theta$$

である．

一定の速さで角度が増加するから，その定係数をωと書くと

$$\theta = \omega t$$

である．

円を一周するとき，**θは２π**だけ変わり，**時間は周期*Tだけ***変わる．

したがって

$$2\pi = \omega T$$

言い換えると

$$\omega = 2\pi/T$$

である．ωを**角速度**という（$\boldsymbol{\omega = d\theta/dt}$），

円運動でなく振動のときは**角振動数**ともいう．**角周波数**という人もいる．

$\theta = \omega t$ だと $t = 0$ で x=A, y=0 となるので，一般性を持たせるなら

$\theta = \omega t + \varphi$

とする．φは時刻ｔ＝0 での中心角である．$\theta(0) = \varphi$ を**初期位相**という．

等速円運動を横から見ると

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi),$$
$$y(t) = A\,sin(\omega t + \varphi)$$

のように，サイン関数やコサイン関数の周期運動が見える．これを**単振動**という．

簡単な回転運動の組み合わせで，さまざまな周期運動を作ることができる．スピログラム
縦と横の振動を組み合わせると回転運動ができる．リサ―ジュ図形
リサ―ジュ図形は，二つの振動の振幅比，振動数比，位相差を観察する手段となる．

4. **サイン関数と複素指数関数**

単位円上の点を$P(x,y)$とし，OPがx軸となす角をθとすると

$$x=\cos\theta,\quad \sin\theta=y$$

ここで，点 P と複素数

$\cos\theta+i\sin\theta,\ \ i=\sqrt{-1}\,,i^2=-1$

を対応させると，xy座標平面がそのまま複素平面となる.

オイラーの公式

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta\ ,\ \ e=2.7\ldots(\text{自然対数の底})$$

を既知として，サイン・コサインのさまざまな性質を整理する.

zを複素数とすると，e^z はzすなわち**複素数の指数関数**であり指数の規則が成り立つ：複素数z_1,z_2について

$$e^{z_1+z_2}=e^{z_1}\times e^{z_2}$$

とくに$z=X+iY$について

$$e^z=e^{X+iY}=e^Xe^{iY}=e^X\cos Y+ie^X\sin Y$$

も，証明せずに利用する.

基本的な値：

$$e^0=e^{2\pi i}=1,\ \ e^{\frac{\pi}{2}i}=i,\ \ e^{\frac{\pi}{2}i}=i,\ \ \ e^{\frac{3\pi}{2}i}=e^{-\frac{\pi}{2}i}=-i\quad \mathrm{e}^{\pi i}=e^{-\pi i}=-1$$

(1) $e^{-i\theta}=\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)=\cos\theta-i\sin\theta=\left(e^{i\theta}\right)^*$

… $\left(e^{i\theta}\right)^*$は$e^{i\theta}$の複素共役(c.c.)である.

(2) $\cos\theta=\frac{1}{2}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)=\mathrm{Re}\left[e^{i\theta}\right],\qquad \sin\theta=\frac{1}{2i}\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)=\mathrm{Im}[\mathrm{e}^{i\theta}]$

… 複素数とその共役複素数の和の 1/2 は実部に，差の$1/(2i)$は虚部に等しい.

(3) $e^{i(\theta+2\pi)}=\mathrm{e}^{i\theta}e^{2\pi i}=e^{i\theta}$

(4) $e^{i(\theta\pm\pi)}=e^{i\theta}e^{\pm\pi i}=-e^{i\theta}$

(5) $e^{i(\pi-\theta)}=e^{i\pi}e^{-i\theta}=-e^{-i\theta}=-\cos\theta+i\sin\theta$

(6) $e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}=e^{i\theta}e^{\frac{\pi}{2}i}=i\,e^{i\theta}=-\sin\theta+i\cos\theta$

(7) $e^{i(\theta-\frac{\pi}{2})}=e^{i\theta}e^{-\frac{\pi}{2}i}=-i\,e^{i\theta}=\sin\theta-i\cos\theta$

(8) $\left|\mathrm{e}^{i\theta}\right|=1,\quad \left|\mathrm{e}^{i\theta}\right|^2=e^{i\theta}\cdot\left(e^{i\theta}\right)^*=e^{i\theta}e^{-i\theta}=e^0=1,$

･･･複素数の絶対値の２乗　＝　実部の２乗　＋　虚部の２乗，ピタゴラスの定理である

（９）$\mathrm{e}^{i(\alpha+\beta)}=e^{i\alpha}\times e^{i\beta}=(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)$

･･･有名な加法定理である

問．関係式(3)～(8)をサイン・コサインの関係式として書き直せ.

解答例（３）

左辺＝$\cos(\theta+2\pi)+i\sin(\theta+2\pi)$

右辺＝$\cos\theta+i\sin\theta$

左右両辺の実部どうしが等しい：$\cos(\theta+2\pi)=\cos\theta,$

虚部どうしが等しい：$\sin(\theta+2\pi)=\sin\theta$

5. **サイン関数と複素指数関数**

点 P が単位円上を一定の速さで回転する.

- $\theta = \omega t$, $z(t) = e^{i\omega t} = \cos\omega t + i\sin\omega t$
- $\omega > 0 \rightarrow$ 反時計回り， $\omega < 0$ 時計回り
  - $e^{i\omega t} + e^{-i\omega t} = 2\cos\omega t$：**実軸上の単振動、** $e^{i\omega t} - e^{-i\omega t} = 2i\sin\omega t$：**虚軸上の単振動**

時間微分：$e^{i\omega t}$をtで微分する．微分の定義から

$$\frac{d}{dt}e^{i\omega t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{e^{i\omega\cdot(t+\Delta t)} - e^{i\omega t}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{e^{i\omega t}(e^{i\omega\Delta t} - 1)}{\Delta t} = e^{i\omega t}\times\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(e^{i\omega\Delta t} - 1)}{\Delta t} = e^{i\omega t}\times(i\omega)$$

$$\because\ e^{z} \equiv 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \cdots \quad\rightarrow\quad \mathrm{e}^{i\omega\Delta t} \simeq 1 + i\omega\Delta t$$

$$\frac{d}{dt}e^{i\omega t} = i\omega\, e^{i\omega t}$$

時間積分：

不定積分 $\int f(t)dt = F(t)$は「$F(t)$をtで微分すると$f(t)$になる」ことを示す記号.

$\therefore\ \int \mathrm{e}^{i\omega t}dt = \frac{1}{i\omega}\int e^{i\omega t}dt = \frac{1}{i\omega}e^{i\omega t} + C$

右辺を微分すれば，確かめられる

問： 以下の式をサインとコサインの関係として書き直せ.

解答例，微分の式

$$\frac{d}{dt}e^{i\omega t} = \frac{d}{dt}(\cos\omega t + i\sin\omega t)$$

$$i\omega\, e^{i\omega t} = i\omega(\cos\omega t + i\sin\omega t) = -\omega\sin\omega t + i\omega\cos\omega t$$

両式の実部と虚部を比較すると

$$\frac{d}{dt}\cos\omega t = -\omega\sin\omega t\,,\quad \frac{d}{dt}\sin\omega t = \omega\cos\omega t$$

6. サインとコサインの重ね合わせ

同じ振動数のサインとコサインの和をとる：$A\cos\omega t + B\sin\omega t$

・　一つのサイン（あるいはコサイン）の振動で表せる.

逆に，ある位相のサイン（あるいはコサイン）の振動は，サインとコサインの和で表せる.

【複素指数関数を用いた$A\cos\omega t + B\sin\omega t$の計算】

まず，

$$\cos\omega t = \frac{1}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}),\quad \sin\omega t = \frac{1}{2i}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})$$

これより

$$A\cos\omega t = \frac{A}{2}e^{i\omega t} + \frac{A}{2}\ e^{-i\omega t},\ \ B\sin\omega t = \frac{B}{2i}e^{i\omega t} - \frac{B}{2i}\ e^{-i\omega t}$$

したがって

$A\cos\omega t + B\sin\omega t = \frac{1}{2}(A - iB)e^{i\omega t} + \frac{1}{2}(A + iB)e^{-i\omega t}$

上式の右辺の係数について

$$|A - iB| = |A \mp iB| = \sqrt{A^2 + B^2}$$

また

$$A - iB = \sqrt{A^2 + B^2}\ e^{i-\varphi}、A + iB = \sqrt{A^2 + B^2}\ e^{i\varphi}$$

となるφを用いると

$A\cos\omega t + B\sin\omega t = \sqrt{A^2 + B^2}\left\{\frac{1}{2}e^{i(\omega t - \varphi)} + \frac{1}{2}e^{-i(\omega t + \varphi)}\right\} = \sqrt{A^2 + B^2}\cos(\omega t - \varphi)$

【図の説明】

複素フーリエ級数を定義するときの準備として

$$\cos\omega t = \frac{1}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}),\quad \sin\omega t = \frac{1}{2i}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})$$

を用いて実数の関数$A\cos\omega t + B\sin\omega t$の計算を行ったが，次のような取り扱いをすることが多い．まず，どんな複素指数関数を用いたら，その実部が$A\cos\omega t + B\sin\omega t$となるかを考えると

$A\cos\omega t = \mathrm{Re}[Ae^{i\omega t}]$，および　$B\sin\omega t = \mathrm{Re}[iB\mathrm{e}^{i\omega t}]$

となる．そこで$Ae^{i\omega t} - Bie^{i\omega t}$を整理すると

$$Ae^{i\omega t} - Bie^{i\omega t} = (A - iB)e^{i\omega t} = \sqrt{A^2 + B^2}e^{-i\phi}e^{i\omega t}$$

最右辺の実部は

$$\mathrm{Re}\left[\sqrt{A^2 + B^2}e^{-i\phi}e^{i\omega t}\right] = \sqrt{A^2 + B^2}\cos(\omega t - \phi)$$

となり，題意が示される.

問　$A\cos\omega t + B\sin\omega t = \sqrt{A^2 + B^2}\cos(\omega t - \varphi)$と書けることをサイン・コサインの加法定理を用いて示せ.

$\tan\varphi$をAとBで表せ.

解

右辺を加法定理で展開すると

$A\cos\omega t + B\sin\omega t = \sqrt{A^2 + B^2}(\cos\varphi\cos\mathrm{\omega t} + \sin\varphi\sin\omega t)$

したがって

$$A = \sqrt{A^2 + B^2}\cos\varphi,\ B = \sqrt{A^2 + B^2}\sin\varphi,\quad \tan\varphi = \frac{B}{A}$$

とおけば与式が成立する

7.　　フーリエ級数

信号波形が，繰り返し周期T（角振動数 $\omega = 2\pi/T$）だが単純なサイン波でないとき，
基本周期Tの波形は，
- ・周期 $\frac{T}{m}$, $m = 1,2,\cdots$の（コ）サイン波形を
- ・様々な振幅と位相

で重ね合わせれば，再現できる.
このことを式で表すと

$$f(t) = A_0 + A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) + \cdots, \quad \omega_m = m\frac{2\pi}{T}$$

である.
「各振動数の項の位相がϕ_kである」という表現のかわりに，各項をサインとコサインの和で書いて

$$f(t) = a_0 + a_1 \cos(\omega_1 t) + a_2 \cos(\omega_2 t) + \cdots$$
$$+ b_1 \sin(\omega_1 t) + b_2 \sin(\omega_2 t) + \cdots$$

ともなる.
さらに，同じ内容を複素指数関数を用いて

$$f(t) = c_0 + c_1 e^{i\omega_1 t} + c_2 e^{i\omega_2 t} + \cdots$$
$$+ c_{-1} e^{-i\omega_1 t} + c_2 e^{-i\omega_2 t} + \cdots$$

ともなる.