音と光　第２回　複素指数関数　Q&A

問題 01

Q.　解答の「$(\sqrt{3}+i)(1-i)=2\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{6}i}\times\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}=2\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{12}i}$」という計算を解説してください.

A. $\sqrt{3}+i=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=2\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{6}i}$,　　$(1-i)=\sqrt{2}\,\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)=\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$　→ $(\sqrt{3}+i)(1-i)=2\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{6}i}\times\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$

$\mathrm{z}_1=r_1e^{i\theta_1}$,　　$\mathrm{z}_2=r_2e^{i\theta_2}$　→ $\mathrm{z}_1\times z_2=r_1e^{i\theta_1}\times r_2e^{i\theta_2}=r_1\times r_2\times e^{i\theta_1}\times e^{i\theta_2}=r_1r_2e^{i\theta_1+i\theta_2}=r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

$\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{12}$,　これらを総合すると，　$2\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{6}i}\times\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}=2\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{12}i}$を得ます.

Q. 複素指数関数の表記のしかたが分かりません.

A. 実数xの指数関数はe^xと書きます．その引数xが複素数のとき，複素指数関数と言います．すなわち $z=x+iy$のとき

$$e^z=\mathrm{e}^{x+iy}=e^x\times e^{iy}$$

が複素指数関数です．とくに$z=i\theta\ (x=0,y=\theta\ )$の場合すなわち$\mathrm{e}^{i\theta}$を複素指数関数と呼ぶこともあります.

問題 02

Q.「z」は複素数を表す文字のようですが，よくわかりませんでした.

複素数（の変数）を表す文字でよく用いられるものはw,z があります．もちろん例外もあり時代や国によって異なりますが，（教科書や論文であれば）前後の文脈から判定すべきものです．一方，実数（の変数）を表すには s,t,u,v,yを用いる例が多いです．整数はi,j,k,ℓ,m,n，有理数はp,q,rなど．ギリシャ文字もたくさん用いられます.

Q.　解答に「$|\mathbf{e}^{i\theta}|=|\cos\theta+i\sin\theta|=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$」とありますが・・・？

A. ごめんなさい，誤植です．もちろん

$$\left|\mathrm{e}^{i\theta}\right|=|\cos\theta+i\sin\theta|=\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=1$$

が正しい式です.

Q. $|\mathbf{z_1}+\mathbf{z_2}|\le|\mathbf{z_1}|+|\mathbf{z_2}|$の証明と「三角形の２辺の和は他の１辺より長い」ことがどう関係するのですか．数式を用いて証明するにはどうすればよいのですか.

A. 複素平面上にz_1とz_2および$\mathrm{z}_1+\mathrm{z}_2$に対応するベクトルを描き，ベクトル$\mathrm{z}_2$を平行移動してその始点がベクトル$\mathrm{z}_1$の終点と一致するようにします．そうすると 3 つのベクトルの矢印が閉じて三角形を描きます．この三角形の３つの辺の長さがそれぞれ$|\mathrm{z}_1+\mathrm{z}_2|,|\mathrm{z}_1|,|\mathrm{z}_2|$なので，三角形の２辺の和は他の１辺より長いという事実が$|\mathrm{z}_1+\mathrm{z}_2|\le|\mathrm{z}_1|+|\mathrm{z}_2|$という式で表されます.

代数で証明するには，$z_1=x_1+iy_1$，$z_2=x_2+iy_2$とおき絶対値の計算を実行します．証明すべき式の各辺は負ではないので，両辺を２乗した式$|\mathbf{z_1}+\mathbf{z_2}|^2\le|\mathbf{z_1}|^2+|\mathbf{z_2}|^2+\mathbf{2}|\mathbf{z_1}||\mathbf{z_2}|$すなわち

$$|\mathrm{z}_1+\mathrm{z}_2|^2=(x_1+x_2)^2+(\mathrm{y}_1+\mathrm{y}_2)^2\le(x_1^2+y_1^2)+(x_2^2+y_2^2)+2\sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)}=|\mathbf{z_1}|^2+|\mathbf{z_2}|^2+2|z_1||z_2|$$

を証明しても同等です.

$$(x_1+x_2)^2+(\mathrm{y}_1+\mathrm{y}_2)^2=(x_1^2+y_1^2)+(x_2^2+y_2^2)+2x_1x_2+2y_1y_2$$

となるので，証明すべき式は

$$x_1x_2+y_1y_2\le\sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)}$$

$x_1x_2+y_1y_2<0$の場合，この不等式は自明です．$0\le x_1x_2+y_1y_2$のとき，両辺を２乗した不等式

$$(x_1x_2)^2+(y_1y_2)^2+2x_1x_2y_1y_2\le(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)=x_1^2x_2^2+y_1^2y_2^2+x_1^2y_2^2+y_1^2x_2^2$$

したがって

$$2x_1x_2y_1y_2 \le x_1^2y_2^2 + y_1^2x_2^2$$

が成立すればよい，ということになります．移項して整理すると

$$x_1^2y_2^2 + y_1^2x_2^2 - 2x_1x_2y_1y_2 = (x_1y_2 - x_2y_1)^2 \ge 0$$

となり証明が完了します．

問題 03

Q. Re, Im が何の記号かわかりません．

A.　一般に

$z = x + iy$ (ただし，xとyは実数 … と書かなくても，このように書くとほぼ間違えなくそういう仮定)

とすると，

$$\mathrm{Re}[z] = x,\ \mathrm{Im}[z] = y$$

です．Re[z]は real part of z，z の実部，Im[z]は imaginary part of z, z の虚部と呼びます．

この問の式

$\mathrm{Re}[e^{i\omega t}] = \frac{e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}}{2} = \cos\omega t$，$\mathrm{Im}[e^{i\omega t}] = \frac{e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}}{2i} = \sin\omega t$

は，Re[z]と Im[z]の定義を複素指数関数に適用した具体例となっています．

問題 04

Q.「等速円運動を合成する」という意味がわかりませんでした．

A. より正確に表現するなら「複素平面上で，原点を始点とし，原点を中心とする単位円周上の点を終点とするベクトルが２つある．一方の終点は$e^{in\omega t}$,他方の終点は$e^{-in\omega t}$に対応する．ここで t を時間とすると，一方は反時計回り，他方は時計回りの等速円運動を行う．２つのベクトルの和によってできたベクトル（合成されたベクトル）の終点が実軸上で単振動することを確認せよ」となります．

問題で要求した作業は，代数的な操作

$$e^{in\omega t} + e^{-in\omega t} = (\cos n\omega t + i\sin n\omega t) + (\cos n\omega t + i\sin(-n\omega t)) = 2\cos n\omega t$$

が「２つの複素数$e^{in\omega t}$と$e^{-in\omega t}$が互いに複素共役であるため（対応する２つのベクトルは，互いに実軸を鏡として映したときの対称図形）和の虚部が 0 となり実部のみとなる（ベクトルの和が実軸上に乗る）こと．実部の値が振幅 2，角振動数$n\omega$で振動するコサイン関数となる」ことを表しているのを確認することでした．

Q.グラフの描き方がわかりません

A. たとえば$e^{2\pi it}$は，変数が実数の t，関数値が複素数の $\cos 2\pi t + i\sin 2\pi t$です．この実部をグラフにするとは，$\cos 2\pi t$をグラフで表すことです．虚部をグラフにするとは$\sin 2\pi t$をグラフにすることです．

その他

Q. 複素関数のグラフを描く方法にはどのようなものがありますか．

A. 複素関数は，一般には変数が複素数$z = x + iy$で，関数値も複素数$f = u + iv$です：

$$f(z) = u(z) + i\,v(x) = u(x,y) + i\,v(x,y)$$

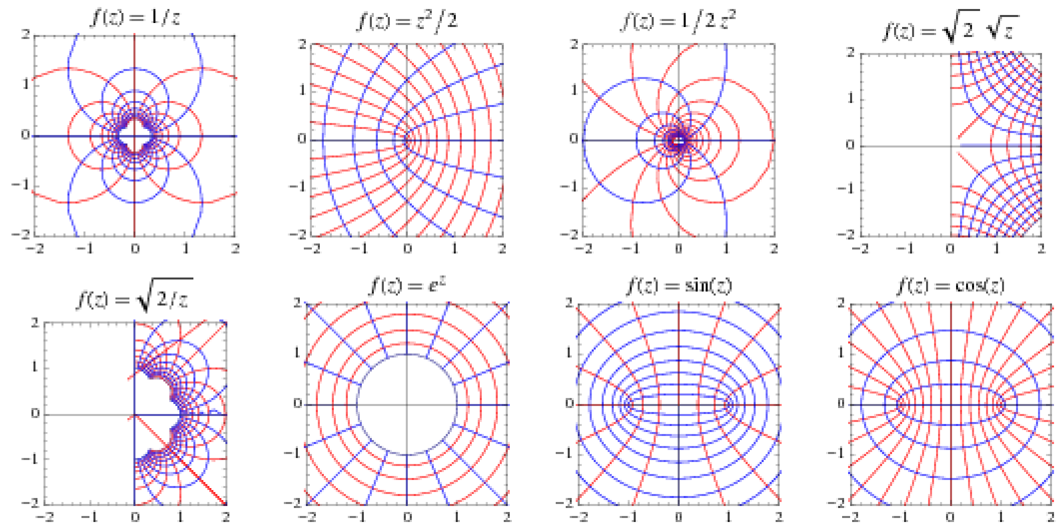
紙に描くグラフは（軸の目盛りが実数にならざるをえないので）実数を座標軸にせざるをえません．そうすると，2 変数関数$u(x,y)$と$v(x,y)$をそれぞれ別々に描くというのが一つの方法です．

また

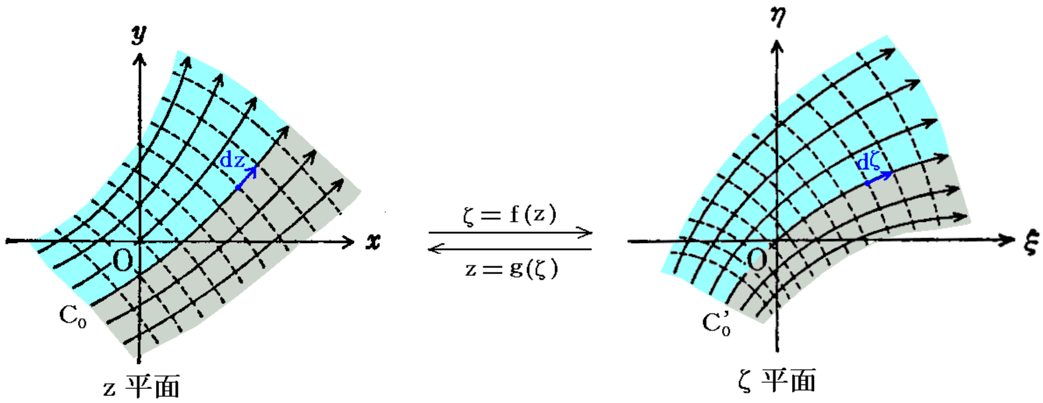
$$f(z) = r(x,y)e^{i\theta(x,y)},\ r(x,y) = |f|,\ \theta(x,y) = \arg f$$

として関数値の絶対値と偏角をそれぞれ別に 2 変数関数のグラフとして表す方法もあるでしょう．

さらに，$w = f(z)$と書き複素関数を z 平面から w 平面への写像であるという意識にたって次のような表現をすることもあります．z 平面上に x=一定，y＝一定の線群を描きます（グラフ用紙の縦横の線）．これらの線が w 平面でどのような曲線となるかを示すのです．



より一般的には， z 平面上のある曲線群が，w 平面上のどのような曲線群となるかを示します．



三角関数のフーリエ展開

複素指数関数の直交関係