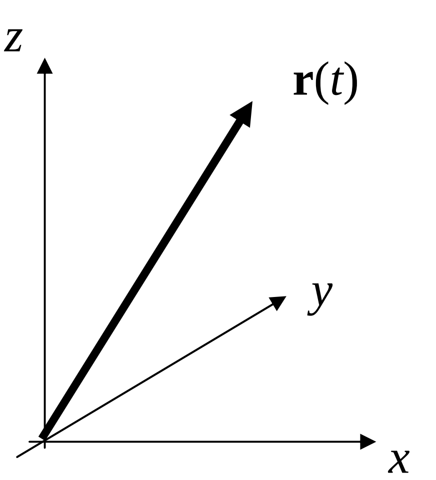
# 運動のベクトル表示と運動の相対性

## ２．運動のベクトル表示

# 位置ベクトル　$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$

- 原点から質点の位置に向かう矢印
- 質点の座標$(x,y,z)$　→　$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$
- 「始点」は常に原点（このベクトルだけ）
- 大きさ＝原点からの距離（単位m）
- 質点の運動
  - $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ 、$\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$固定
  - $\mathbf{r}$ は時刻 $t$ の関数



# 「変位ベクトル」と「速度ベクトル」の関係

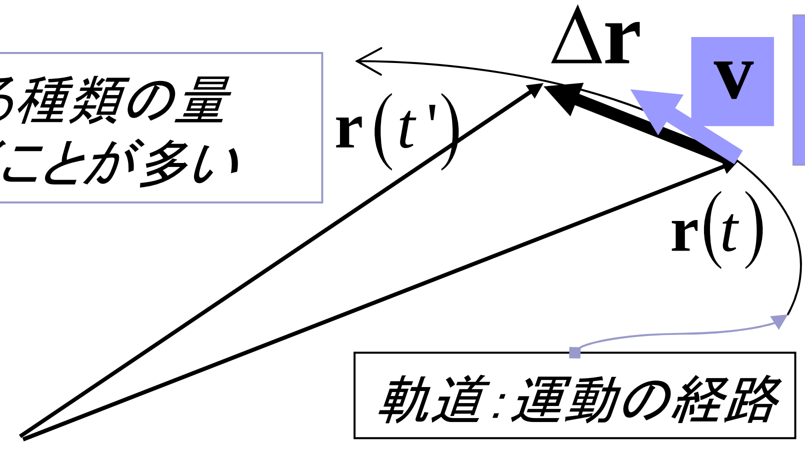
- 時刻　*t*→*t*' の変位
- 時間　Δt = *t*' - *t*

  で割ると平均速度
- 極限　Δt→0 で速度

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t') - \mathbf{r}(t)$$
$$= \left(x(t') - x(t)\right)\mathbf{e}_x + \left(y(t') - y(t)\right)\mathbf{e}_y$$

$$v(t) = \lim_{t'\to t} \frac{\mathbf{r}(t') - \mathbf{r}(t)}{t' - t} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

*速度と変位は異なる種類の量だが同じ面上に描くことが多い*




*速度ベクトルの向きは軌道の接線方向*

*軌道：運動の経路*

# 速度ベクトルを計算で求める

- 直交座標系:
  - 基底ベクトルが固定されているから
  
  位置ベクトルの成分を時間で微分

$$v_x = \frac{dx}{dt}, v_y = \frac{dy}{dt}, v_z = \frac{dz}{dt}$$

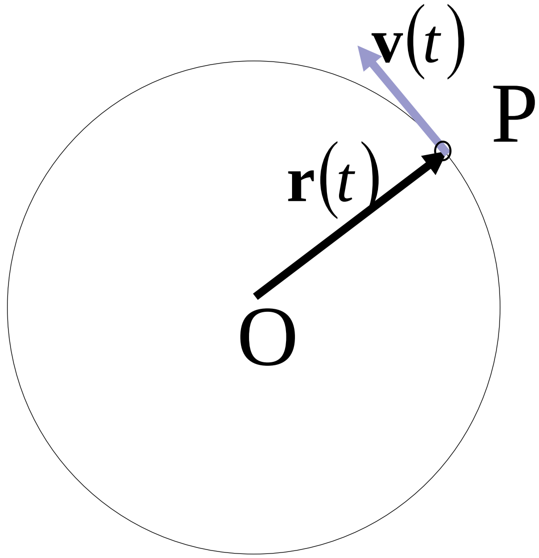
- 速度ベクトルの成分は各座標軸方向の速度

$$\mathbf{v} = v_x\mathbf{e}_x + v_y\mathbf{e}_y + v_z\mathbf{e}_z$$
$$= \frac{dx}{dt}\mathbf{e}_x + \frac{dy}{dt}\mathbf{e}_y + \frac{dz}{dt}\mathbf{e}_z$$

- 速さ:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

# ベクトルを巧みに利用する　例題3.4




- 速度は軌道の接線方向(一般)
  - 円の接線は半径と直交(円の特例)
  - 円運動は等角速度で<u>なくてよい</u>
- 円の中心を原点にとる(と楽)
  - $\mathbf{r}(t)$と「質点までの半径」が一致
  - 円運動:$\mathbf{r}$の長さが一定: $|\mathbf{r}|=r_0$
    - 内積による表現　$\mathbf{r}\cdot\mathbf{r} = r_0^2 =$ 時間的に変化しない
  - 位置ベクトル$\mathbf{r}$と速度ベクトル$\mathbf{v}$が直交
    - 内積による表現　$\mathbf{r}\cdot\mathbf{v} \;=\; \mathbf{0}$

# 例題3．4（続き）

- 「半径の二乗が一定」という式を時間微分
  - スカラーによる演算：半径の大きさが時間的に変わらない

基礎知識としては
合成関数の微分法

$$(r(t))^2 = t\text{によらず一定} \Rightarrow t\text{で微分すると}0$$

$$\frac{dr^2}{dt} = \frac{dr^2}{dr}\frac{dr}{dt} = 2r\frac{dr}{dt} = 0,\quad r = a \neq 0 \quad \text{より} \frac{dr}{dt} = 0$$

  - ベクトルによる演算：ベクトル**r**とベクトル**v**が常に直交する

$$\mathbf{r}\bullet\mathbf{r} = t\text{によらず一定} \Rightarrow t\text{で微分すると}0$$

$$\frac{d(\mathbf{r}\bullet\mathbf{r})}{dt} = 2\mathbf{r}\bullet\frac{d\mathbf{r}}{dt} = 0,\quad \mathbf{r} \neq 0,\quad \frac{d\mathbf{r}}{dt} \neq 0\text{より}\quad \mathbf{r} \perp \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

計算方法は教科書参照：
成分で書いて計算する
形式的にはスカラーの微分と同じ

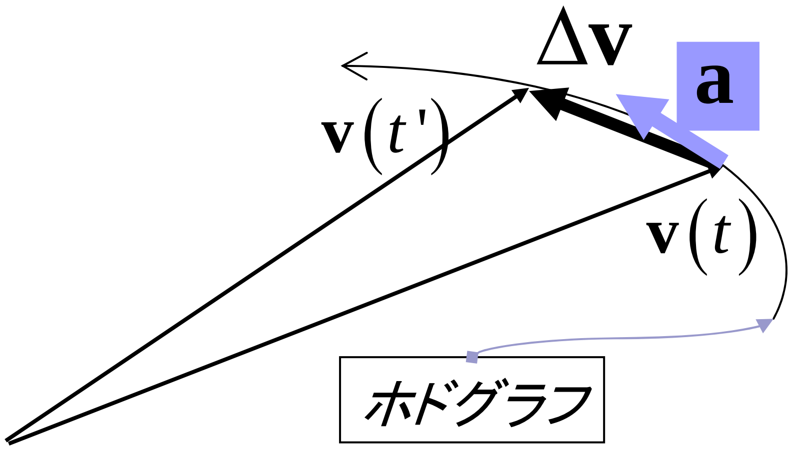
# 加速度ベクトル

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\mathbf{e}_x + \frac{dv_y}{dt}\mathbf{e}_y$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{e}_x + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{e}_y$$

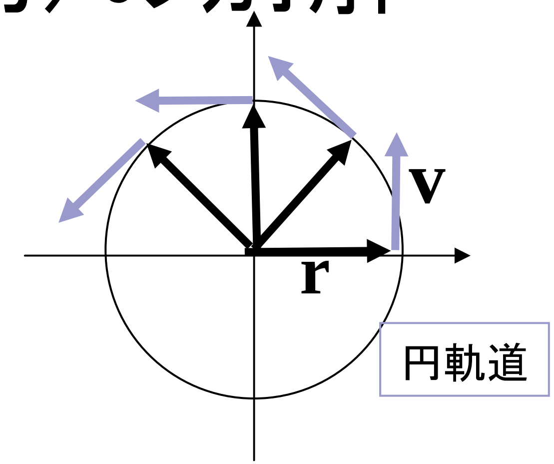
- 速度ベクトルを時間で微分
  - 計算で求める方法
  - ホドグラフを用いる方法
    - ホドグラフ:「始点をそろえて」速度ベクトルを描くとき、ベクトルの先端が通過する点がつくる曲線
    - 加速度ベクトルの向きは

    ホドグラフの接線方向



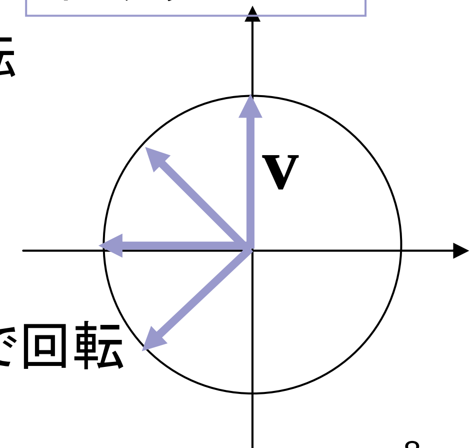
# ホドグラフから加速度を求める
# 例題3．5（等角速度円運動）の別解

- 円運動（一般）
  - 円の中心を原点
  - 位置ベクトル**r**と速度ベクトル**v**は常に直交




- 等角速度
  - 質点が単位時間内に進む距離はいつも同じ
    - 質点の速さは一定　$v = |\mathbf{v}|$ =一定
  - **r**は一定の速さで回転
    - **r**⊥**v** のまま回転　→　ベクトル**v**も一定の速さで回転

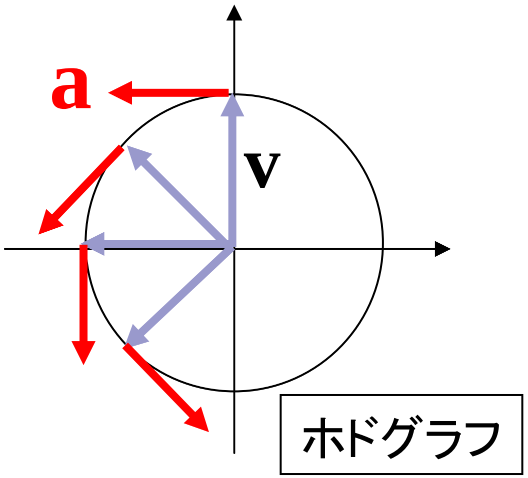
等各速度円運動
ホドグラフは円

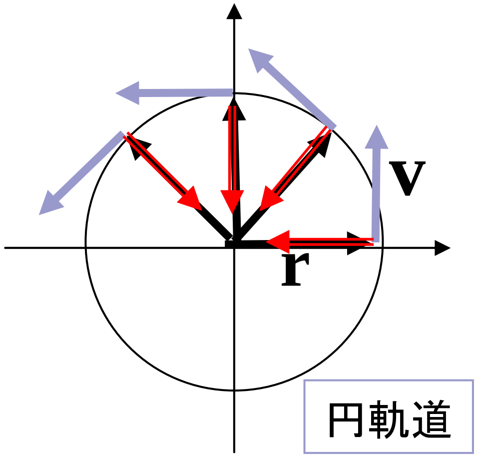



- ホドグラフは円
  - 半径は$v = |\mathbf{v}|$ =一定
  - 速度ベクトルの先端はホドグラフ上を一定の速さで回転

# 例題3．5（続き1）

- 等角速度円運動
  - ホドグラフ上のベクトルvの運動が、再び「等角速度円運動」
  - これより、加速度ベクトルa（ベクトルvを時間微分したもの）はvに直交し、大きさが一定
  - **r⊥v, v⊥a　→　r//a**；加速度は位置ベクトルと反平行（「反」はホドグラフ上の矢印の向きを観察して分かる）



# 例題3．5（続き2）

- 等加速度円運動
  - 速度の大きさ:
    - 円軌道の半径 $r$
    - 一周の距離 $= 2\pi r$
    - 一周の時間 $= T$
    - 角速度 $\omega = 2\pi / T$
    - 速さ $v = 2\pi r/ T = r\omega$
  - 加速度の大きさ:
    - ホドグラフの半径 $= v$
    - その一周の距離 $= 2\pi v$
    - 一周の時間 $= T$
    - 角速度 $\omega = 2\pi / T$
    - 加速度の大きさ $a = 2\pi v/ T = v\omega$

$$v = r\omega$$

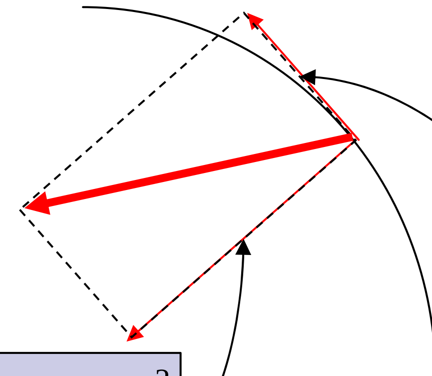
$$a = v\omega = (r\omega)\omega = r\omega^2$$

# 「等角速度円運動」のまとめ

- 速さは一定なのに加速度！
  - 速度ベクトル(の向き)が変化
- 速度ベクトル
  - 向き:円の接線方向
  - 大きさ:半径×角速度
- 加速度ベクトル
  - 向き:円の中心
  - 大きさ:半径×角速度の2乗

# 等角速度ではない円運動

- 円周上を速さを変えながら運動する
- 加速度
  - 円の中心に向かう成分
    - 速度の向きが変わるため
      - 等角速度のときと同じ理由で発生
      - 等角速度のときと同じ値
  - 円の接線方向の成分
    - 速さ$r\omega$が変化するため
      - 円($r$=一定)、$\omega$が時間的に変化するため




加速度の半径方向成分

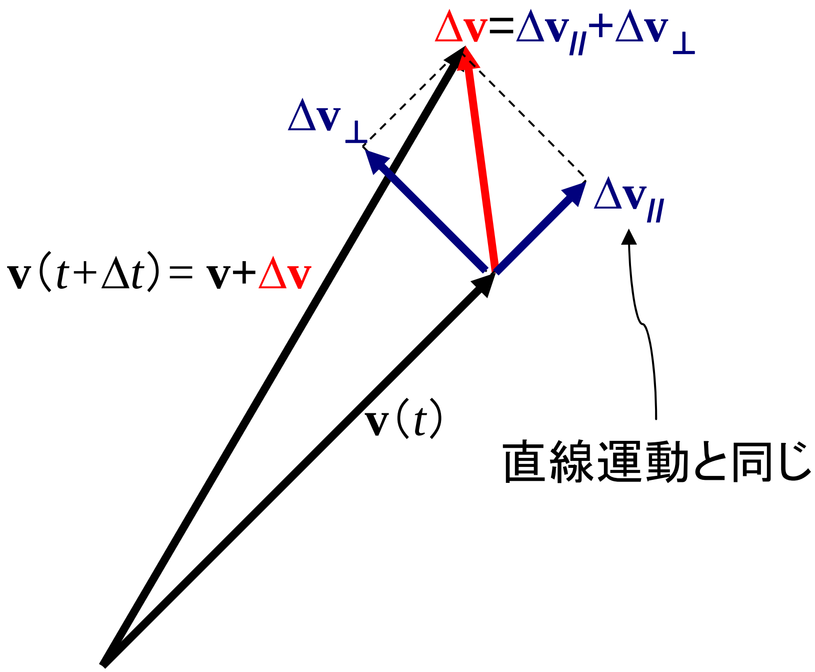
$$r\omega^2 = r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$

加速度の接線方向成分

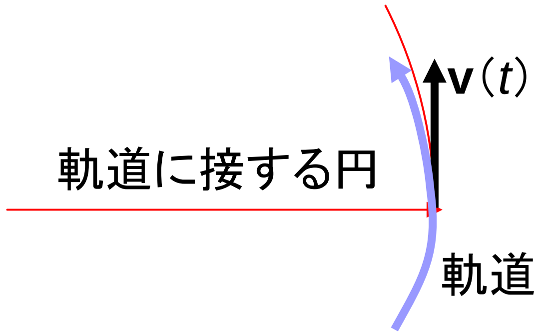
$$\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(r\omega) = r\frac{d\omega}{dt} = r\frac{d}{dt}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) = r\left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)$$

# 加速度の成分

- 速度の向きと平行、直角に分解
- 平行方向
  - 直線運動と同じ扱い
    - 加速度の大きさ: $a_{//}$= d$v$/d$t$
- 直角方向
  - 等角速度円運動の扱い
    - その瞬間を円運動と見る
    - 軌道(曲率)半径 $r$
    - 加速度の大きさ: $a_{\perp}= v^2/r$




Δv⊥: 等角速度円運動と同じ



# ベクトル記号なら 3次元運動も「1次元と同じ」記述

- 原点、座標軸
- 位置: $x(t)$
- 速度: $v = \mathrm{d}r/\mathrm{d}t$
- 加速度: $a = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t$

$$x(t) = x(0) + \int_0^t v(t)\,dt$$

$$v(t) = v(0) + \int_0^t a(t)\,dt$$

- 原点、座標軸不要*
- 位置 $\mathbf{r}$
- 速度 $\mathbf{v} = \mathrm{d}\mathbf{r}/\mathrm{d}t$
- 加速度 $\mathbf{a} = \mathrm{d}\mathbf{v}/\mathrm{d}t$

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(0) + \int_0^t \mathbf{v}(t)\,dt$$

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(0) + \int_0^t \mathbf{a}(t)\,dt$$

＊　ベクトルの式を書くときは不要だが
成分を使って計算するときは、座標軸が要る

# ベクトルの定積分

被積分関数が
スカラー

↓

被積分関数が
ベクトル

$$\int_0^t f(t)dt = \lim_{\substack{N\to\infty \\ \Delta t\to 0}} \sum_{k=1}^{N} f(t_k)\Delta t$$

$$\int_0^t \mathbf{f}(t)\,dt = \lim_{\substack{N\to\infty \\ \Delta t\to 0}} \sum_{k=1}^{N} \mathbf{f}(t_k)\Delta t$$

ベクトル$\mathbf{f}(t_1)$、$\mathbf{f}(t_2)$、…を寄せ集めて、ベクトルの和をとっただけ。
具体的に計算するときは、座標系を決め、ベクトルを成分に分解し
成分ごとに「スカラーの積分」をすればよい。

$$\mathbf{f}(t) = f(t)\mathbf{e}_x + g(t)\mathbf{e}_y + h(t)\mathbf{e}_z$$

$$\int_0^t \mathbf{f}(t)\,dt = \left(\int_0^t f(t)\,dt\right)\mathbf{e}_x + \left(\int_0^t g(t)\,dt\right)\mathbf{e}_y + \left(\int_0^t h(t)\,dt\right)\mathbf{e}_z$$