自然科学入門

最終回

＝まとめ＝

トレーニングとしての「力学」

すべての科学を学ぶ基礎

- 正確さ
  - 数量的に比較する
  - 数式で表し，推論する
- 基本を抽出し，組立てる
  - 簡単なモデル
  - モデルの組み合わせ

力学

- 運動の科学
- 自然科学の発祥
- 他の科学の手本

現代生活に適応する

- 科学の用語の正確な理解
- 報道を理解する

数値の扱い

- 有効数字，有効桁数
  - 0.12×10^5
  - 1.2×10^4
- 誤差の伝搬
  - ２つの数の掛け算，割り算
    - 有効桁数は精度の悪いほうに揃う
  - ２つの数の引き算
    - 桁落ち：同程度の大きさの数の差は有効桁数が下がる
- 量：数値と単位（物理次元が同じときに比較ができる）

運動を科学的に扱うため「装置」

- 座標系
  - 原点，座標軸（基準となる長さ 1 m，基準となる向き）
  - x, $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$, $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z \Leftrightarrow (x, y, z)$

- 時刻
  - 原点，時間軸（基準となる長さ 1 s，時間は進むだけ）
  - t

- 質点
  - 大きさを無視できる物体，質量がある
  - 質量：力と加速度の関係（基準となる大きさ 1 kg）
  - 質点系：質点のあつまり
  - m

変位と速度

- 変位:　[m]
  - 質点の移動（距離と向き）を表す
  - $\Delta x = x_2 - x_1$
  - $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (\Delta x, \Delta y, \Delta z) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$
  - $\Delta r = |\Delta\vec{r}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

- 速度:　[m/s]
  - 位置の変化の時間的な割合，単位時間あたりの変位
  - $\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}, \Delta t > 0 \quad \Longrightarrow \quad v = \frac{dx}{dt}$
  - $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$
  - 速さ:　$s = |\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$

加速度

- 加速度： [m/s²]
  - 速度の時間的な変化の割合
  - $\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t},\ \Delta t>0 \quad \Longrightarrow a=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}$
  - $\vec{a}=\left(a_x,a_y,a_z\right)=\frac{d\vec{v}}{dt}=\left(\frac{dv_x}{dt},\frac{dv_y}{dt},\frac{dv_z}{dt}\right)$
    $=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\left(\frac{d^2x}{dt^2},\frac{d^2y}{dt^2},\frac{d^2z}{dt^2}\right)$
- 加速度ベクトルの成分（1次元の加速度）の符号
  - 加速度が正（負）：速度ベクトルの成分が増える（減る）
    - 速度が正のとき，速さが大きくなる（小さくなる）
    - 速度が負のとき，速さが小さくなる（大きくなる）
- 加速度の時間的な変化の割合は重要ではない

微積分法による情報の変換

- $x(t) \quad \rightarrow v(t) = \frac{dx}{dt} \quad \rightarrow a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$

  tx図の傾き　　tv図の傾き, tx図の曲がり方

- $v(t) = v(0) + \int_0^t a(t')dt'$

  ta図のグラフの下側の面積

- $x(t) = x(0) + \int_0^t v(t')\,dt'$

  tv図のグラフの下側の面積

座標変換

- 静的
  - 原点の移動（座標軸の平行移動）
  - 座標軸の回転
- 動的
  - ２つの座標系の原点が並進運動する
  - ２つの座標系の座標軸が回転運動する
- ガリレイ変換
  - 座標軸の平行移動，移動は等速度
  - $x = x' + Vt, \quad \vec{r} = \vec{r}' + \vec{V}t$

例

- 等速度直線運動
- 放物運動
  - 等加速度運動と等速度運動の組み合わせ
- 単振動
- 等速円運動（等角速度円運動）
  - 単振動の組み合わせ
- 指数関数的

運動の法則（運動方程式）

I ： 慣性系の存在が保証される

- 力を受けない質点の運動が等速度となる座標系（慣性系）がある
- 異なる慣性系どうしの関係は，ガリレイ変換

II ： 慣性系では，質点の加速度と力が比例する

- $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = m\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{dp}{dt} = F,\quad m\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d}{dt}\vec{p} = \vec{F},$
- m: 質量,　$p = mv,\ \vec{p} = m\vec{v}$: 運動量
- 質点に加わる力と，初期条件（位置と速度）が分かればその後の運動が完全に予測できる

- 力の基準：1 kgの物体に1 m/s^{2}の加速度を与える，1 N=1 kg m/s^2
- 運動量の基準：1 kgの物体が1 m/sの速さをもつ，1 kg m/s

運動の法則（力の性質）

III: 質点間に作用する力は等大，逆向き，1直線上

- 質点系を「ひとまとまり」にして1質点とするとき，IIが成り立つ

$$m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{1外},\ m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{2外}$$

$$M \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F}_{1外} + \vec{F}_{2外},\quad M = m_1 + m_2,\ \vec{V} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{M}\right)$$

重心の移動速度

IV: 合力，質点に作用する複数の力のベクトル和

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots$$

運動方程式から情報を抽出する

- 物体に加わる力（複数）
  - 遠隔力，接触力

- 慣性系の選択
  - 現象を簡単に表せる座標軸の向きと原点

- 運動方程式を書く
  - 位置の2階微分 vs 速度の1階微分
  - 初期条件を書く

- 速度を求める，位置を求める
  - 微分方程式を解く
  - 解を想定し微分方程式に代入して確かめる
  - 積分する

- 必要な情報を数学的に表し，それを抽出する

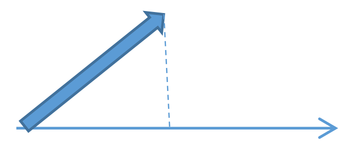
日常的な場面で現れる力

- 垂直抗力と摩擦
  - 固い物体どうしの接触
  - 垂直抗力（拘束力，軌道を制限するように力が変化）
  - 摩擦力，静止摩擦と動摩擦
    - モデル：クーロンの法則（経験則，不成立の場合あり）
- 糸の張力
  - 張られた糸の両端の物体に作用する力，糸の断面でも．
  - 糸の向きに，引く力
    - モデル：切れない，糸が伸びない（拘束力）
- バネの力
  - もとの形を復元しようとする力
    - モデル：フックの法則（微小変形なら常に成立）
- 空気抵抗
  - 速度と逆向き
  - 速度に比例
  - 速度の２乗に比例

日常的な場面で現れる力

- 万有引力
  - 質量をもつ物体間に作用する引力
  - 2つの質量の積に比例
  - 距離の逆二乗則
  - 重ね合わせの原理
- 重力
  - 地球による万有引力を地球表面近くで観察
  - 質量によらず，一定の重力加速度で運動する
- その他
  - 電気的な力
  - 原子核をまとめる力，崩壊させる力
  - 原子や分子を結合する力

仕事と仕事率



- 力が物体にする仕事

$$\Delta W = F\,\Delta x \;\rightarrow\; W = \int_{x_A}^{x_B} F(x)dx = \int_{t_A}^{t_B} F(t)\cdot v(t)\,dt$$

$$\Delta W = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r} \rightarrow W = \int_{C:\vec{r}_A\rightarrow\vec{r}_B} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{t_A}^{t_B} \vec{F}(t)\cdot\vec{v}(t)\,dt$$

- 仕事率

$$P = Fv = \vec{F}\cdot\vec{v} = \frac{dW}{dt}$$

- 単位
  - 仕事: 1Nの力を加えながら1m移動する, 1 J = 1 Nm = 1 kg m^2/s^2
  - 仕事率: 1N の力を加えながら1 m/sの速さで移動する,1W=1 J/s

例

- 水平からの傾きがθのゆるい坂道を，質量mの車が，道にそった距離ℓ だけ登る間に重力がする仕事は？

$$-mg(\ell \sin\theta) \simeq -mg\ell\theta$$

- この車の速さが v =一定のとき(エンジンの)仕事率，パワー，出力は最小でどれだけ？

$$\text{所要時間}\ t = \frac{\ell}{v}$$

$$P = \frac{mg\ell\theta}{t} = mgv\theta$$

保存力と位置エネルギー

- 保存力:
  - する仕事が移動の始点と終点だけによる
  - 移動の仕方（経路，速度，時刻）によらない
- 非保存力:
  - 速度に依存する（摩擦），時間に依存する，渦を巻く
- 位置エネルギー:
  - 保存力のする仕事の符号を反転
  - 基準点を決める

$$V(x) = V(0) - \int_0^x F(x')dx'$$

$$\rightarrow V(\vec{r}) = V(0) - \int_0^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}'$$

エネルギー保存則

運動方程式の変形

$$m\frac{dv}{dt} = F \rightarrow m\frac{dv}{dt}v = Fv \rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = Fv = F\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \int_{t_1}^{t_2} F\frac{dx}{dt}dt = \int_{x_1}^{x_2} Fdx = -(V_2 - V_1)$$

運動エネルギー:

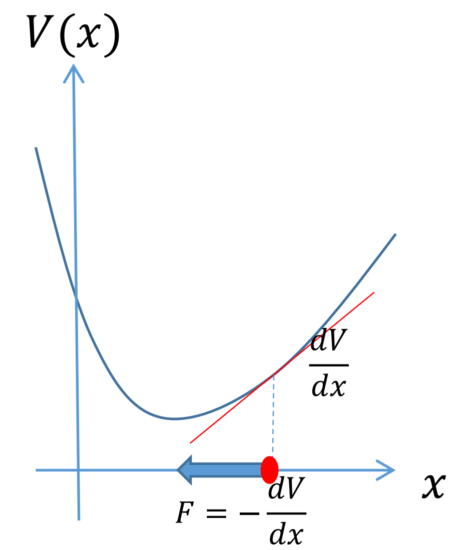
$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m|\vec{v}|^2 = \frac{1}{2}m\,\vec{v}\cdot\vec{v}$$

保存力だけで運動する物体の力学的エネルギーは保存する

$$\frac{1}{2}mv_2^2 + V_2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + V_1 = E$$

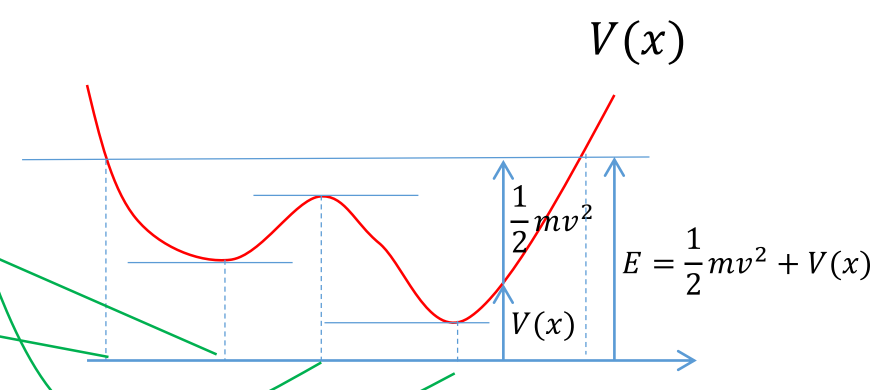
位置エネルギーと力

- $F dx = -dV \rightarrow F = -\dfrac{dV}{dx} \rightarrow \vec{F} = -\nabla V$



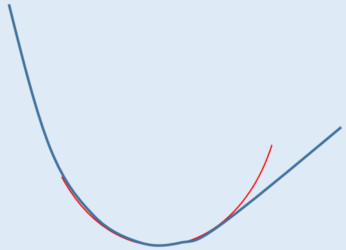
- 力　＝　ー（位置エネルギーのグラフの傾き）

- 運動を位置エネルギーのグラフで予測
  - 安定平衡，不安定平衡
  - 最速
  - 転回点



例題

- 位置エネルギーが極小をもつとき，極小点付近の力はフックの法則$F=-kx$に従う復元力となる.



$$V(x)=V_0+ax^2+bx^3+\cdots$$

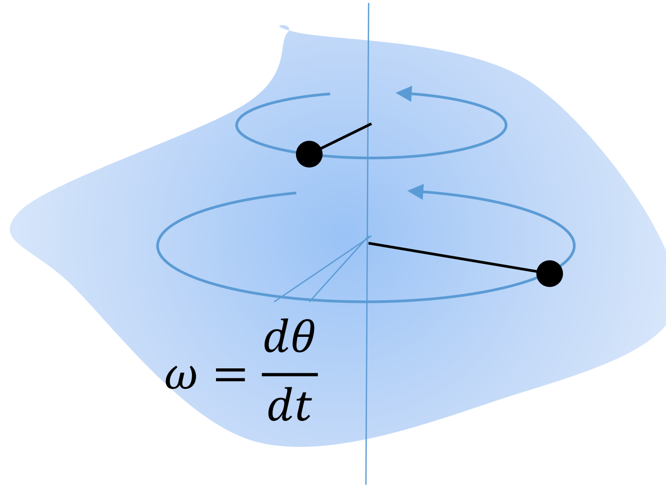
$$F=-\frac{dV}{dx}=-2ax+\cdots\simeq -kx$$

運動の法則から導かれる保存則

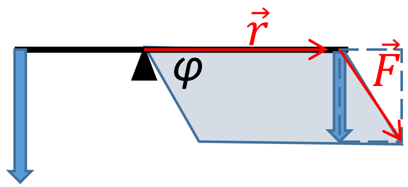
- 運動量保存則
  - 力が加わらない質点の運動量は一定（保存される）
    - ある成分についてだけでも言える
  - $\frac{dp}{dt} = F \rightarrow dp = Fdt = 0 \rightarrow p =$ 一定

- 広義エネルギー保存則
  - 力がする仕事＝その間の運動エネルギーの変化
- 力学的エネルギー保存則
  - 運動エネルギー　＋　位置エネルギー＝一定
  - 位置エネルギー　：　保存力がする仕事の符号を変えたもの

回転運動



- 剛体:
  - 質点のあつまり
  - 質点間の距離が一定
- 固定回転軸のまわりの回転
  - すべての質点が等しいω(角速度)で回転

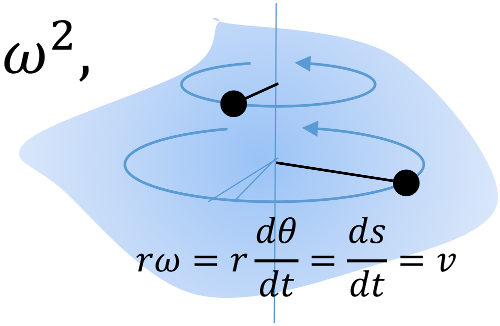


- トルク(力のモーメント)
  - 回転を引き起こす力の効果，てこの原理から類推
  - 回転軸から力の作用点までの距離×力の有効成分
  - $\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$:
    - 大きさは　$|\vec{r}||\vec{F}|\sin\varphi$ (平行四辺形の面積), φは$\vec{r}$と$\vec{F}$のなす角
    - 向きは　　回転軸の方向，右ねじの向き

回転する剛体の運動エネルギー

- 質点　（ωを変数として書く）

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(r\omega)^2 = \frac{1}{2}mr^2\omega^2 = \frac{1}{2}I\omega^2,$$



- 慣性能率，慣性モーメント

$$I = mr^2$$

- 剛体　構成要素のすべての質点にωが共通

$$\sum_{k=1,N} \frac{1}{2}m_k v_k^2 = \frac{1}{2}I\omega^2, \qquad I = \sum_{k=1,N} m_k r_k^2$$

回転軸の位置や向きを変えると，同じ物体でもIの値が異なる．

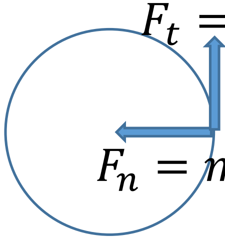
運動方程式の変形

- 1質点

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt}, \qquad \vec{N} = \vec{r}\times\vec{F} = m\,\vec{r}\times\frac{d\vec{v}}{dt} = m\frac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{v})$$

$$\vec{r}\times\vec{v} = (yv_z - zv_y, zv_x - xv_z, xv_y - yv_x)$$

- 円運動
  - 接線方向に力が作用すると，ωが変化する
  - $\vec{r} \perp \vec{v} \rightarrow |(\vec{r}\times\vec{v})| = rv$



$$N = m\frac{d(rv)}{dt} = mr\frac{dv}{dt} = mr^2\frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}(I\omega)$$

$$I\omega = mr^2\omega = mr(r\omega) = mrv = m|r\times v|$$

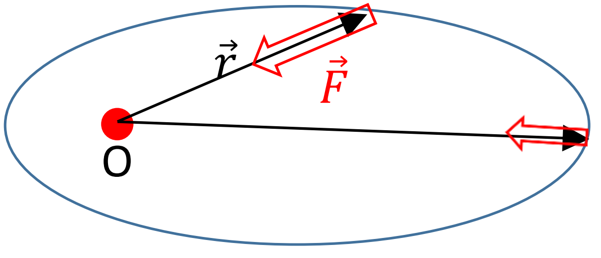
$$\ell \equiv m|(\vec{r}\times\vec{v})| \rightarrow N = \frac{d}{dt}\ell \quad \Leftrightarrow F = \frac{dp}{dt}$$

- 角運動量: 面積速度に比例，原点のとりかたで値が異なる
  - $\vec{\ell} = m\vec{r}\times\vec{v} = \vec{r}\times\vec{p} \;\rightarrow\; \vec{N} = \frac{d}{dt}\vec{\ell}$

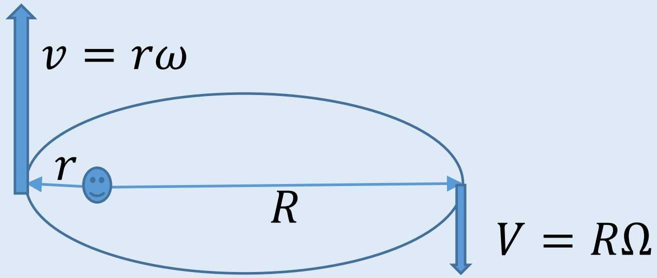
中心力と角運動量保存

- 中心力
  - 力の中心を原点とする
  - $\vec{F}//\vec{r} \to \quad \vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} = 0 \to \frac{d}{dt}\vec{\ell} = 0 \to \quad \vec{\ell} = $ 一定

中心力による運動では，力の中心を原点とする角運動量(面積速度)が一定に保たたれる．（力の大きさがどのように変化しても）



例



- 地球をまわる衛星の楕円軌道は，一番遠いところで地球中心からR, 一番近いところでrである(位置ベクトルと速度が直交している).

  対応する2つの位置で速さはどちらが大きいか？

  その比は？角速度の比は？

$$\ell = mrv = mRV$$

近いところが速い，比は $\frac{v}{V} = \frac{R}{r}$,

$$\ell = mr(r\omega) = mr^2\omega = mR^2\Omega$$，比は $\frac{\omega}{\Omega} = \frac{R^2}{r^2}$