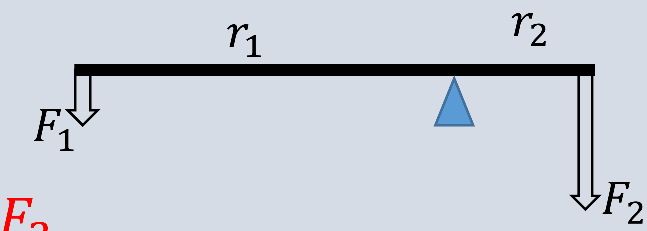
Chapt. 9
角運動量とトルク

回転運動の記述に適する

運動法則の変形

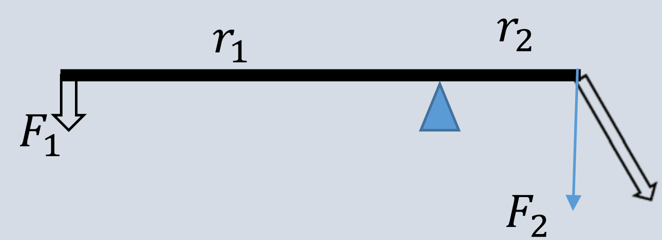
§ 9.1 てこの原理，面積速度
[1 てこの原理とトルク]

- てこの原理：回転しない条件
  - 力の作用点，作用線
  - うでの長さ



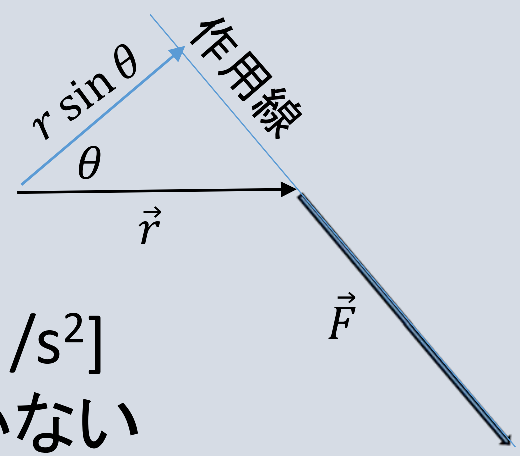
$$r_1 F_1 = r_2 F_2$$

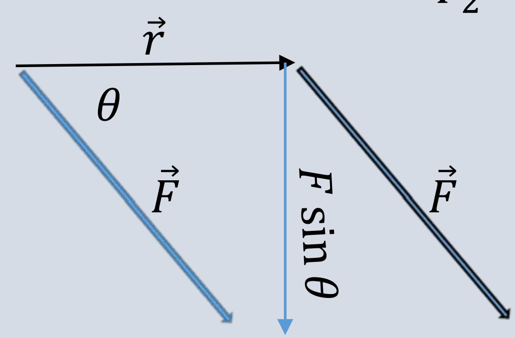
- 一般化
  - $|\vec{r}|\left|\vec{F}\right| \sin\theta = \vec{r} \times \vec{F}$の大きさ
  - $\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = 0$



- トルク

  $\vec{r} \times \vec{F}$





- トルクの単位：

  [N m]=[kg m^2 /s^2]

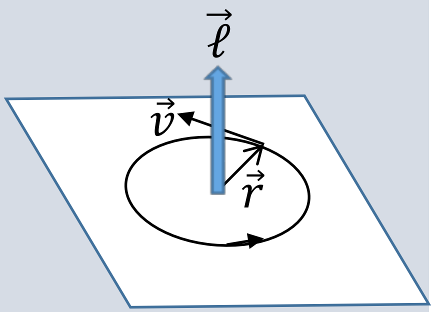
  [J]とは書かない

[2. 面積速度と角運動量]

- 角運動量：原点から見た回転運動の勢いを表す

$$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v})$$

$$\ell = |\vec{\ell}| = m|\vec{r}||\vec{v}| \sin\theta$$



- 円運動を，円の中心から見る

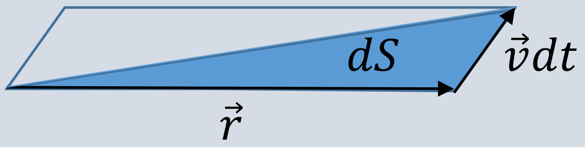
$$\ell = mrv = mr^2\omega$$

$$p = mv = mr\omega$$

- 角運動量の単位：[kg m^2/s] = [J s]

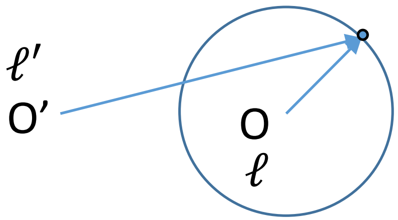
- 面積速度：$\frac{dS}{dt}$， $dS = \frac{1}{2}|\vec{r} \times d\vec{r}| = \frac{1}{2}|\vec{r} \times \vec{v}dt|$

$$\ell = 2m\frac{dS}{dt}$$



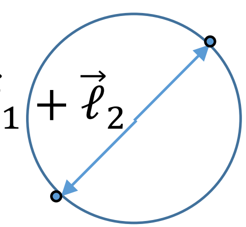
例題 9.1

- 地球の公転運動の角運動量



  - 等速円運動
    - 円の中心を原点とするとき，角運動量が一定
    - 中心以外を原点とするとき，角運動量が時間的に変る
    - 指定されないときは，円の中心を原点とする

$$\vec{\mathcal{L}} = \vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2$$



    - 参考
      - 質点系の全角運動量は，各質点の角運動量の和
      - 質量が等しい2質点が円の直径の両端を同じ速さで回転するとき，全角運動量は原点の選び方によらず同じ

§9.2　ベクトルの外積

- $\vec{A} \times \vec{B}$
  - 向き:$\vec{A}$と$\vec{B}$の両方に直交し，$\vec{A}$から$\vec{B}$に回転する右ねじ
  - 大きさ:$\vec{A}$と$\vec{B}$がつくる平行四辺形の大きさ
- 性質
  - $\left|\vec{A} \times \vec{B}\right| = \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right| \sin\theta$
  - $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A},\ \ \vec{A} \times \vec{A} = 0$
  - $\left(\vec{A}_1 + \vec{A}_2\right) \times \vec{B} = \vec{A}_1 \times \vec{B} + \vec{A}_2 \times \vec{B}$
  - 成分による計算，$\vec{A} = \left(A_x, A_y, A_z\right), \vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y \ \ ,\ \ A_z B_x - A_x B_z \ \ ,\ \ A_x B_y - A_y B_x)$$

§ 9.3 角運動量とトルク [1,2,3 外積による表記]

$$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$$

[4. 角運動量の時間的な変化]

$$\Delta\vec{\ell} = (\vec{r} + \Delta\vec{r}) \times (\vec{p} + \Delta\vec{p}) - \vec{r} \times \vec{p}$$
$$= \vec{r} \times \Delta\vec{p} + \Delta\vec{r} \times \vec{p} + \Delta\vec{r} \times \Delta\vec{p}$$

$$\frac{\Delta\vec{\ell}}{\Delta t} = \vec{r} \times \underbrace{\left(\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}\right)}_{\substack{\text{運動方程式} \\ \text{により}\vec{F}}} + \left(\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right) \times \vec{p} + \frac{\Delta\vec{r} \times \Delta\vec{p}}{\Delta t}$$

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} + \underbrace{\vec{v} \times \vec{p}}_{\text{平行だからゼロ}} = \underbrace{\vec{N}}_{\text{トルク}}$$

角運動量保存則

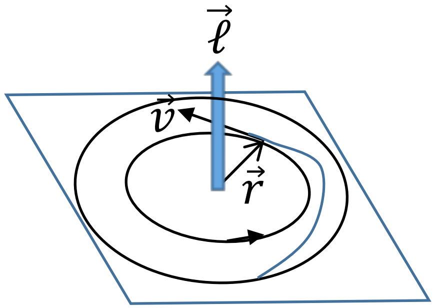
- 力が不動の１点に向かうとき
  - 不動の点を原点
  - 力と物体の位置ベクトルが同じ向き　⇒　トルクが0

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{\ell} = \text{一定}$$

- 例：
  - 太陽の引力：　ケプラーの法則[面積速度一定]
  - 一端の位置が固定された糸の張力

Q

- 滑らかな板を水平におき，孔から出る糸に物体をとりつけて回転させる．物体に加わる力は糸の張力だけ．糸を手繰り寄せるときに一定に保たれる量を調べよ



回転運動の運動エネルギー

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(r\omega)^2 = \frac{1}{2}mr^2\omega^2 = \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$\ell = mr^2\omega = I\omega$$

慣性能率（慣性モーメント）$I = mr^2$
適宜さだめた回転軸zのまわり

剛体（形が変わらない）の慣性能率
どの質点も同じ角速度で回転する

$$I = m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + \cdots \to \iiint (x^2 + y^2)\rho dxdydz$$

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$
$$p = mv$$

$$x \Leftrightarrow \theta$$
$$v \Leftrightarrow \omega$$
$$m \Leftrightarrow I$$
$$p \Leftrightarrow \ell$$

向心力と遠心力

- 回転する座標系
  - 非慣性系
  - 運動方程式が成り立たない
  - 実在しない力を仮定して，運動方程式を書く

- 回転系で静止する物体
  - 遠心力
  - 遠心力を感じるのはなぜ？

- 回転系で運動する物体
  - 遠心力＋コリオリ力