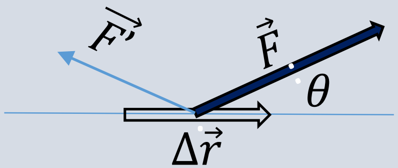
Chapt. 7
エネルギー　１

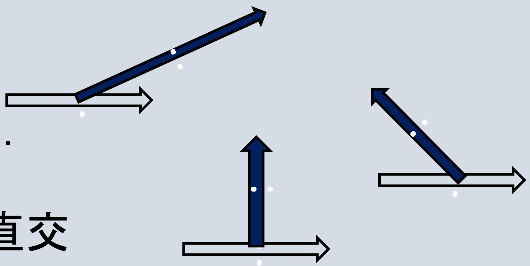
運動の過程で不変な量を探す

§ 7.1 仕事
[定義]

- 状況
  - 物体に一定の力$\vec{F}$が加わる
  - 物体が直線的に移動する：変位 $\Delta\vec{r}$
    - 移動が起きる原因は，$\vec{F}$でなくてもよい（他の力など）.



- 定義
  - 力$\vec{F}$がする仕事W
    - 変位$\Delta\vec{r}$が生じる間に
    - 物体に対して
  - $W = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r} = \left|\vec{F}\right|\left|\Delta\vec{r}\right|\cos\theta$
    - $W > 0$:力の向きと移動の向きが同じ.
    - $W < 0$: 力の向きと移動の向きが逆.
    - $W = 0$: 力が0, 変位が0, 力と変位が直交



- 仕事の単位
  - 1 N m = 1 kg m^2/s^2 = 1 J　(ジュール)

Q 7.1

重さ10 N の物体（1リットルのペットボトル）を，手で持って鉛直上向きに１ｍ 持ち上げる．このとき物体は静かに移動し，加速度はほとんど0である．

[A] 手（が物体に加えた力）はどれだけの仕事をしたか

[B] 重力はどれだけの仕事をしたか

A 7.1

- 物体に加わる力は，重力と手からの力だけ．両者はともに鉛直方向．
- 物体の加速度を0とするので，重力と手からの力の大きさは等しく，逆向き．

[A] 手（からの力）がする仕事＝上向き10 N × 上向き1 m＝1０ J

[B] 重力がする仕事 = 下向き10 N × 上向き 1 m ＝ ー10 J

[仕事の定義の一般化]

[状況]

- 物体は直線上を動く（簡単にするための特殊化）
- 力が変化する(一般化)
  - $F(x, v, t)$：位置，速度，時刻に依存する
  - $F(x(t), v(t), t) = F(t)$：結局，時間だけの関数として書ける

[微積分法の利用]

- 力が一定とみなせる程度の微小な移動 dx

$$dW = F(x, v, t)\,dx = F\frac{dx}{dt}dt = F(t)\,v(t)\,dt$$

- 時刻 t_A～t_Bの間にこの力がする仕事

$$\mathrm{W}(t_B, t_A) = \int_{t_A}^{t_B} F(t)v(t)dt$$

- 力が位置だけで決まるときは

$$\mathrm{W}(t_B, t_A) = W(x_B, x_A) = \int_{x_A}^{x_B} F(x)\,dx$$

例題 7.1

- 空気抵抗がある自由落下
  - 座標：鉛直下向きにx軸, $v(0) = 0,\ x(0) = 0$
  - 抵抗は速度の関数: $F(x, v, t) = F\big(v(t)\big) = -cv(t)$
    - $v(t) = \frac{g}{\gamma}(1 - e^{-\gamma t})$
- 抵抗がする仕事
  - $W_F(t, 0) = \int_0^t F(v(t))\, v(t)\, dt = -c \int_0^t v^2 dt < 0$
- 重力がする仕事
  - $W_{mg}(t, 0) = \int_0^t mg\ v\ dt = mg \int_0^t v\ dt = mg\ x(t) > 0$

[仕事率(パワー)]

$$dW = W(t+dt,0) - W(t,0) = W(t+dt,t)$$
$$= \int_t^{t+dt} F(t)v(t)dt = F(t)v(t)dt$$

- 仕事率:　$P = F\,v = \frac{dW}{dt}$

  単位時間当たりの仕事
- 単位

  1 J/s =1 kg m^2/s^3= 1 W(ワット)

Q 7.2

[A] 重力だけで自由落下する質量mの物体がある.
落下を開始後の時刻tにおいて，重力がする仕事の仕事率Pを求めよ.

[B] 上問で，$m = 1\ \mathrm{kg}$，$t = 1\ \mathrm{s}$ のとき，Pの値を計算せよ.

A 7.2

[A] $F = mg,\ v(t) = gt,\ P = Fv = mg^2t$

[B] $P = (1\ \mathrm{kg})(9.8\ \mathrm{m/s^2})^2(1\ \mathrm{s}) = 96\ \mathrm{W}$

[運動エネルギー]

[状況]

力 F だけによる運動.（Fは合力とすればよい）
速度が変わるが, Fがした仕事と速度の関係を知りたい

[運動方程式を積分する]

運動方程式 : $F = m\dfrac{dv}{dt}$

仕事 : $W(t_B, t_A) = \int_{t_A}^{t_B} Fv\, dt = \int_{t_A}^{t_B} mv\dfrac{dv}{dt}dt = m\int_{v_A}^{v_B} vdv$

$$= \frac{m}{2}v_B^2 - \frac{m}{2}v_A^2$$

運動エネルギー:　$K = \dfrac{1}{2}mv^2$

[運動エネルギーの単位]

ジュール　[J]　仕事と同じ

[広義のエネルギー保存則]

$W(t_B, t_A) = K_B - K_A$

運動を起こした力による仕事と，運動エネルギーの変化は等しい

$K_B = K_A + W(t_B, t_A)$

運動を起こした力による仕事は，すべて運動エネルギーとして追加される

$K_B - W(t_B, 0) = K_A - W(t_A, 0) =$一定（$\because t_A, t_B$が各辺に分離）

$W(t_B, t_A) = W(t_B, 0) - W(t_A, 0)$に注意

ある**時刻**の運動エネルギーから，その**時刻**までになされた仕事を引くと，**時刻によらず同じ値**になる.

運動の法則から直接に得られる結論.

力の種類によらない（力がvやtに直接依存しても成立）

例題　7.2

摩擦力がした仕事＝運動エネルギーの変化分

- 摩擦力で減速：仕事は負，運動エネルギー減少
- 摩擦力で加速：仕事は正，運動エネルギー増加

参考

ボールを上に投げ上げる

- 上昇中は重力がする仕事が負，運動エネルギー減少
- 下降中は　〃　正，運動エネルギー増加

例題 7.3

エネルギー保存則と座標変換

	A系	B系
原点の速度	V (*B*の原点の速度)	0
物体の速度	$v+V \to V$	$v \to 0$
運動量変化	$mV - m(v+V) = -mv$	$0 - mv = -mv$
運動エネルギー変化	$\frac{1}{2}mV^2 - \frac{1}{2}m(v+V)^2 = -\frac{1}{2}mv^2 - \color{red}{mvV}$	$0 - \frac{1}{2}mv^2 = -\frac{1}{2}mv^2$
摩擦力	$-F$ （力はガリレイ変換で変わらない）	$-F$
止まるまでの時間	$t = \frac{mv}{F}$ （時間も変わらない）	$t = \frac{mv}{F}$ (力積の計算)
移動距離	$d + Vt$	d
仕事	$-F\,(d+Vt) = -Fd - \color{red}{mvV}$	$-Fd$

§ 7.3 位置エネルギーと力学的エネルギー保存則
[1. 位置エネルギー]

[状況]　運動の原因となる力が位置だけの関数

- 摩擦力はvに依存するから除外される
- 時間によって（？）異なる力も除外される

力の時間依存は $x(t)$を介してのみ.

[広義エネルギー保存則の書き換え]

$$W(t_B, t_A) = \int_{x_A}^{x_B} F(x)dx = W(x_B, x_A) = W(x_B, 0) - W(x_A, 0)$$

$$K_B - W(x_B, 0) = K_A - W(x_A, 0)$$

ある<u>位置</u>における運動エネルギーから, その<u>位置</u>に来るまでになされた仕事を引くと, 質点の<u>位置によらず</u>, したがって**軌道上のどの位置でも, 同じ値**になる.

[1′ 位置エネルギー]
[2.力学的エネルギー保存則]

位置エネルギー $V(x)$

$$-W(x, x_S) = -\int_{x_S}^{x} F(x)dx = V(x) - V(x_s)$$

- 力 $F(x)$による運動.
- 基準位置x_sからxまでの移動でFがする仕事，符号反転
- 移動のしかたや時刻に依存しない,
- 基準位置は，力が0になる位置にとることが多いが，他もあり.

質点の力学的エネルギーは，どの位置でも同じ値

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + V(x) = 一定$$

§7.4 位置エネルギーの例 [1. 重力]

- 座標軸:　鉛直上向き, 地表が原点(基準位置)
- 重力:　　$F = -mg$
- 位置エネルギー:

$$V(x) = -\int_0^x F dx = mgx$$

- 力学的エネルギー保存則:

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgx = E$$

$E =$ 地表($x = 0$)での運動エネルギー

例題　7.4

力学的エネルギー保存則が成立するとき

運動方程式を積分せずに,

速度の大きさが位置の関数として求まる

[2 バネの復元力]

- バネ定数 k（フックの法則），質量mの質点
- 座標軸：自然長の質点位置を原点（基準位置）
- 復元力： $F = -kx$
- 位置エネルギー： $V(x) = -\int_0^x (-kx)\,dx = \frac{1}{2}kx^2$
- 力学的エネルギー： $E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$

例題 7.5

- 既知 : バネに結ばれた質点の運動は単振動

$$x = a\cos\omega_0 t\,, \qquad v = -a\omega_0 \sin\omega_0 t\,, \qquad \omega_0 = \sqrt{k/m}$$

- 運動エネルギー

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 a^2 \sin^2\omega_0 t = \frac{1}{2}ka^2\sin^2\omega_0 t$$

- 位置エネルギー

$$V = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}ka^2\cos^2\omega_0 t = \frac{1}{2}m\omega_0^2 a^2\cos^2\omega_0 t$$

- 力学的エネルギー

$$E = K + V = \frac{1}{2}ka^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 a^2 = \text{一定}$$

[位置エネルギーのグラフ]

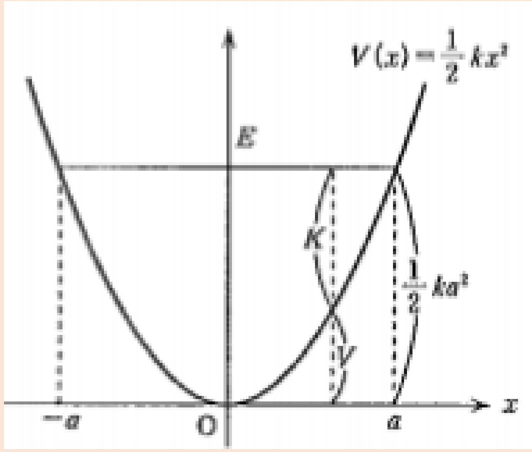
$V(x)$のグラフと，Eの値を示す水平線を描く

運動エネルギーの値（x依存性）を読み取る

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = E - V(x) \geq 0$$

運動可能領域：

Eより下側の$V(x)$の範囲



例題　7.6

力学的エネルギー保存則を用いた，バネ-質量系の運動の解析

$V(x)$のグラフ:
- 最大変位 $x = a$ において速度 $v = 0$
- 最大速度 v_0は$x = 0$で実現

力学的エネルギー保存則:

$$E = \frac{1}{2}ka^2 = \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$s = |v| = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{1}{2}kx^2\right)} = \sqrt{\frac{2E - kx^2}{m}} = \sqrt{\frac{k(a^2 - x^2)}{m}} = \underbrace{\sqrt{\frac{ka^2}{m}}}_{\omega_0 a}\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}$$

§ 7.5 位置エネルギーから力を求める

位置エネルギーの定義:

$$V(x) = -\int_{x_S}^{x} F(x)dx$$

微小な変位での$V(x)$の変化:

$$dV = V(x + dx) - V(x) = -\int_{x}^{x+dx} F(x)dx$$

$$= -F\,dx$$

$$F(x) = -\frac{dV}{dx}$$

$V(x)$のグラフの傾きから力を読み取る

例題　7.7

- 微分法を用いて，位置エネルギーから力を計算
- 微分すると定数が消える
  - 位置エネルギーは，基準点との差だけに意味がある

§ 7.6 運動可能領域，平衡点

- 運動可能領域： $E \geq V(x)$

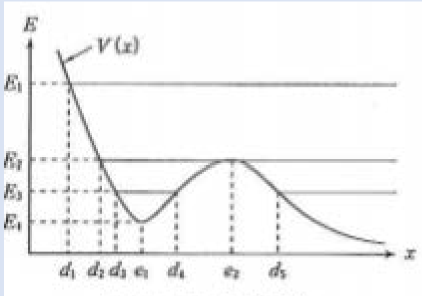


図 7.4　運動可能領域

- $V(x)$の極値を与える点

$$F = -dV/dx, \qquad d^2V/dx^2 \neq 0$$

  - 極小： 安定平衡　　　ずれを復元する力が働く
  - 極大： 不安定平衡