Chapt. 6
いろいろな力

日常的に経験する力をモデル化する

§6.1 垂直抗力と摩擦力
[固体表面から受ける力のモデル化]

- モデル
  - 境界面は変形しない
    - 物体の軌道
      - 境界面上に束縛される.
      - 面から跳びあがることがある.

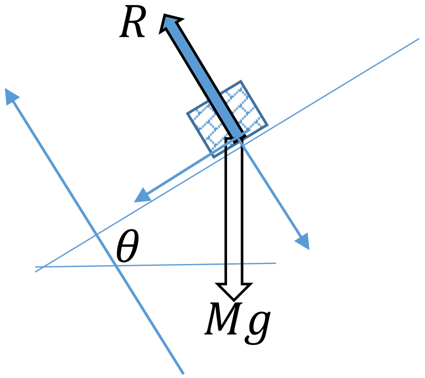
    - 垂直抗力 : 面に沿った軌道に拘束された運動を実現する力
      - 物体が面に潜りこまないでいるようにする力
      - 運動の状態が決まると，垂直抗力の大きさが決まる
  - 摩擦が働く
    - 摩擦力 : 面方向の運動を妨げる力
  - 面から受ける力を，面と平行･垂直に分解した

[垂直抗力の特徴]

- 拘束力
  - 「面に潜りこまない」ように，運動状態で大きさが変わる.
    - ニュートンの力学は「力が決まると運動が決まる」形式なので，取り扱いにくい.
- 処方
  - 面に沿った座標軸をとる
    - 平面：直交座標，　球面：極座標，etc
    - 垂直抗力の方向の運動は考えない
  - 平面
    - 垂直抗力と他の力（重力や物体を押す他の力）がつりあう
  - 曲面
    - 垂直抗力と他の力が回転運動に必要な向心力を発生する.
    - 向心力を接線方向の速さの関数として表し，他の式と連立

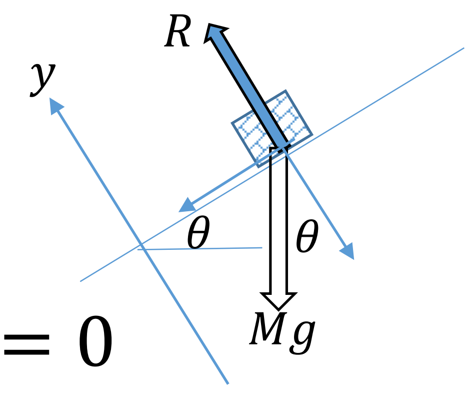
Q .6-1

- 重力を受けながら，水平とθの角をなす斜面を運動する物体（質点）がある．面と垂直方向（y軸）の運動方程式を記し，垂直抗力の大きさを求めよ．垂直抗力の大きさをR，重力をMgとせよ．



A. 6-1

- 物体に加わる力は，垂直抗力と重力だけ．



$$F_y = R - Mg\cos\theta$$

- y軸方向に運動は起きない．加速度$= 0$

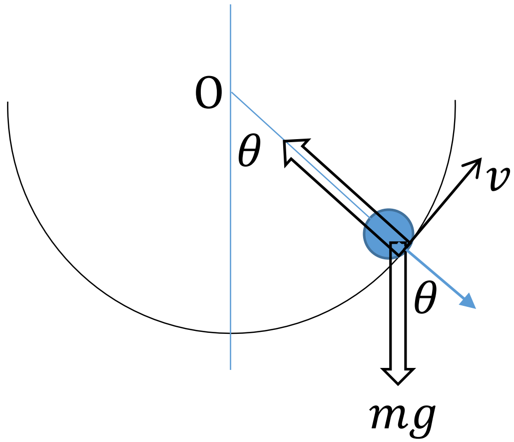
$$\frac{d^2y}{dt^2} = 0$$

- y軸方向の運動方程式から

$$M\frac{d^2y}{dt^2} = R - Mg\cos\theta = 0 \rightarrow R = Mg\cos\theta$$

Q. 6-2

- 重力のもとで，半径rの球面の内側を滑る質点mに加わる垂直抗力を調べよ．物体は接線方向に速さvで運動している．



A.6-2

- 質点に加わる力は垂直抗力Rと重力mgのみ.
- 中心に向かう半径方向の運動
  - 円運動の加速度

$$a = r\omega^2 = \frac{v^2}{r}$$

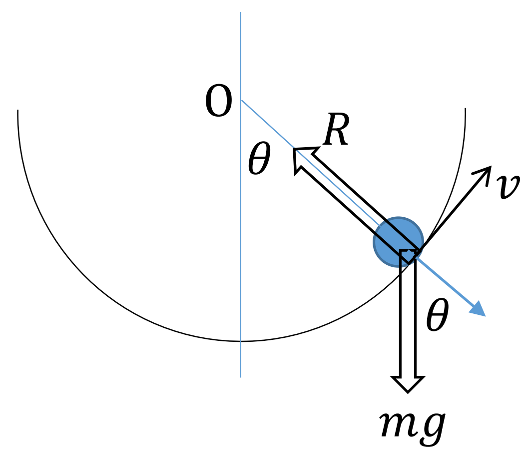
  - 垂直方向からθだけ上がった位置で，物体に加わる力の半径方向の成分:

$$R - mg\cos\theta$$

  - 運動方程式:

$$ma = m\frac{v^2}{r} = R - mg\cos\theta$$

$$R = m\frac{v^2}{r} + mg\cos\theta$$



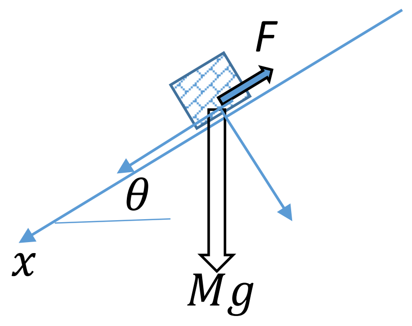
[摩擦力の特徴]

- 現象
  - 面上で静止している物体に加える力を増しても，その力に等しい静止摩擦力が面から加わり物体は動かない．動き出す直前の力が最大静止摩擦力．いったん動き出すと，それより小さな力の動摩擦力が加わる．
- モデル
  - 摩擦力の大きさは，接触する2面の材質や面の状態で変化する
  - 最大静止摩擦力，動摩擦力の大きさは垂直抗力に比例
    - 反例がたくさんある・・・

  - （最大）静止摩擦係数　μ：　$F_{静} \leq F_{\max} = \mu R$
  - 動摩擦係数　μ’:　$F_{動} = \mu' R$

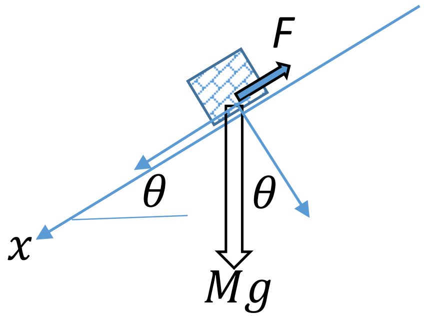
Q. 6-3

- 水平と角θをなす斜面上の物体の運動について，斜面方向(x軸)の運動方程式をたて，摩擦力を調べよ．垂直抗力をRとせよ．



A. 6-4

- x軸を下向きにとる
- 摩擦力の符号
  - 物体の初速度が0のとき，物体は斜面を滑り出そうとするが，摩擦力が上向き（負）に加わる．
  - 物体が運動しているときは，摩擦力は速度と逆向き．
- 運動方程式：$M\dfrac{d^2x}{dt^2} = Mg\sin\theta - F$
  - 静止しているとき
    - $\dfrac{d^2x}{dt^2} = 0, F \leq \mu R = \mu Mg\cos\theta$
    - 不等号が成り立つ範囲で静止する
  - 運動しているとき　$F = \mu' R$
    - $M\dfrac{d^2x}{dt^2} = Mg\sin\theta - \mu' Mg\cos\theta = Mg(\sin\theta - \mu'\cos\theta)$
    - 等加速度運動



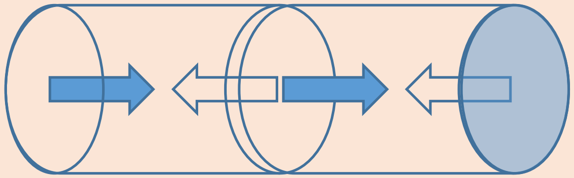
例題　6.1

- 水平な床面で加速する物体
  - 物体に加わる水平方向の力は摩擦力だけ.
  - 摩擦力が物体を加速する
  - 乗り物の加速度
    - 地面との摩擦力÷質量より大きくならない

- 水平な床面で回転運動する物体
  - 摩擦力が回転運動の加速度を生じさせる

§ 6.2 張力
[糸のモデル化]

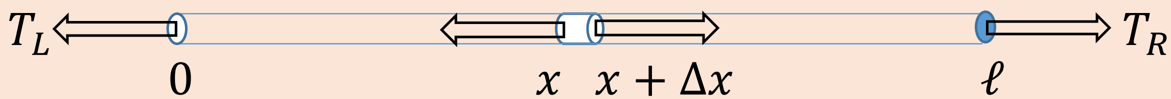
- 引っ張ったときも長さが一定
  - 拘束力：糸につながれた物体の運動は，糸の長さが一定になる軌道をとり，その運動に必要な力が糸（その他）から加わる
- 張力が発生する
  - 外からの力が糸を引き伸ばそうとする⇔糸は縮もうとする
  - 糸が完全に伸びたときだけ，糸の方向に引っ張る力
  - 両端で物体を引っ張る
  - 糸の中間の断面を両側から引っ張る



- 軽い糸
  - 質量を無視できる

[張力と糸の質量]

- 水平面内で糸(ℓ)の両端を引き(力の大きさ:$T_{\mathrm{L}}, T_{\mathrm{R}}$) 加速度$a$を与える
  - 糸の線密度σ :単位長さあたりの質量 [kg/m]
  - ある時刻に左端が$x = 0$,右端が$x = \ell$を通過.
  - 張力の大きさ$T(x), T(0) = T_L, T(\ell) = T_R$



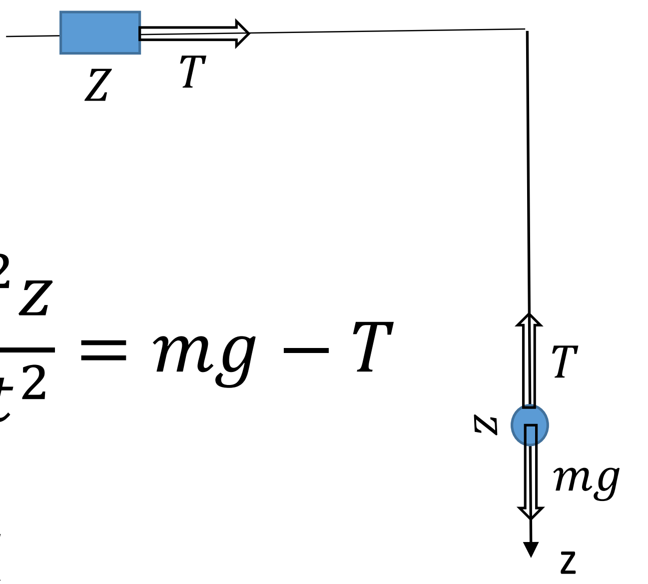
- 糸の部分$x \sim x + \Delta x$(質量Δm=$\sigma \Delta x$)の運動方程式
  - $T(x + \Delta x) - T(x) = \Delta m\, a = \sigma a \Delta x \quad \rightarrow \quad \dfrac{dT}{dx} = \sigma a =$ 一定
  - $T(x) = \sigma a x + T_L,\ \ T(\ell) = T_R = \sigma a \ell + T_L$

  - 加速度$a = 0 \quad \Rightarrow \quad T_R = T_L$
  - 軽い糸 $\sigma = 0 \quad \Rightarrow \quad T_R = T_L$

> 軽い糸: どのような運動であっても,糸の両端に現れる張力は同じ大きさとなる.
>
> 一般には,加速度が0のときだけ,両端の張力が等しい.

例題 6.2

- 糸が直角に曲がっていても【1次元】の運動:　z軸
- 糸の質量を無視:
  - 両端の張力が等しい



- 運動方程式

$$M\frac{d^2Z}{dt^2} = T, \qquad m\frac{d^2z}{dt^2} = mg - T$$

- 糸の長さが一定d

$$z - Z = d$$

例題 6.3

- 糸の長さrが一定，一端固定　⇒　半径rの円軌道
- 角速度が一定：ω
- 物体の加速度：$a = r\omega^2$，円の中心に向かう
- 加速度の原因は糸の張力 $T = ma = mr\omega^2$

- 向心力：　円軌道の中心に向かう力

§6.3 単振動
[フックの法則]

弾性：

力に応じて変形し，もとに戻る性質

復元力：

変形した弾性体がもとに戻ろうとして生じる力

例：バネの復元力

変形量：

例：バネが伸びた長さ

フックの法則（理想化，モデル化）

変形量と復元力が比例する

変形量が小さいとき，どんな弾性体でもよく成り立つ．

[バネに接続した質点の運動方程式]

状況：

水平で滑らかな床面に質量mの物体をおき，バネの片端につなぎ，他端を固定する．

座標軸：

バネの伸縮方向をx軸とする．バネが自然長のときの物体の位置を原点とする．物体の座標xとバネの変形量が一致する．

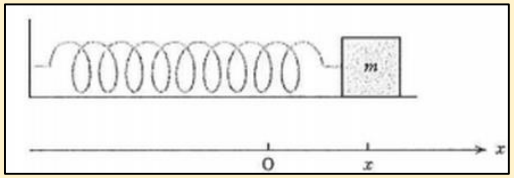
フックの法則：

バネの復元力F（バネが物体に及ぼす力と等しい）

$$F(x) = -kx, \qquad k\text{: バネ定数}$$

運動方程式：

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$



[単振動と運動方程式]

- $x = A\cos\omega_0 t$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -a\omega_0^2\ \cos\omega_0 t = -\omega_0^2 x$$

$$F = m\frac{d^2x}{dt^2} = -m\omega_0^2 x = -kx$$

- $k = m\omega_0^2,\ \ \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$: バネの固さと質量で決まる

- 時間の原点の選び方は勝手

$$x(t) = A_0\cos\omega_0(t - t_0) = A_0\cos(\omega_0 t - \psi)$$
$$= (A_0\cos\psi)\cos\omega_0 t + (A_0\sin\psi)\sin\omega_0 t$$
$$= A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$$

[初期条件を満たす解]

$$x(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin\omega_0 t + B\omega_0 \cos\omega_0 t$$

$$x(0) = A = x_0, \qquad v(0) = B\omega_0 = v_0 \to B = \frac{v_0}{\omega_0}$$

二階微分方程式の一般的な性質:

初期条件(初期位置, 初速度)でその後の運動が完全に決まる.

例題 6.4

- 鉛直方向におもりを付けたバネ
  - 座標原点を選びなおすと，単振動の運動方程式になる
  - 重力とつりあうバネの伸び.
  - フックの法則：変形量が同じなら復元力も同じ

- バネの合成
  - 並列
  - 直列

§ 6.4 万有引力

$$[F = G\frac{mM}{R^2}]$$

- 地上の万有引力の大きさ
  - $F = G\frac{mM}{R^n} = mg \ \rightarrow \ g = \frac{GM}{R^n}$
- n を求めたい ⇒　ニュートン
- Gを求めたい ⇒　キャベンディシュ

- リンゴと月が同じ法則で地球に引かれる
  - 地上のリンゴが地球に引かれて落ちる加速度:　$g = \frac{GM}{R^n}$
  - 月が地球に引かれて円運動を行う加速度:　$g' = \frac{GM}{r^n}$

$$\frac{g}{g'} = \left(\frac{r}{R}\right)^n \sim 60^n$$

  - gを直接に, g'を天体観測で測定して計算した　$\frac{g}{g'}$の値と比較してnを決める
    - 月の公転半径:$r = 60R, R =$ 地球の半径
    - 月の公転周期:$T = 27$日
    - 月の加速度:$g' = r\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \sim 60 \times 6.4 \times 10^6 \times \left(\frac{2\pi}{27\times24\times3600}\right)^2 \sim 0.0028$

$$\frac{g}{g'} \sim \frac{9.8\ \mathrm{m/s^2}}{0.0028\ \mathrm{m/s^2}} \sim 3500, \qquad 60^2 = 3600 \rightarrow \ n = 2$$

地球の「中心から距離」で書くのは，どの程度正しいか？

[万有引力の法則]

万有引力

- 全宇宙の物体に適用される
- 質点間に引力が働く

原点に質点M，位置$\vec{r}$にある質点mが受ける力

$$\vec{F} = -G\frac{mM}{r^2}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$$

$\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$：単位ベクトル=大きさ1で$\vec{r}$の向き

負号：引力

G:万有引力定数

[万有引力の性質]

- 距離の逆2乗則，引力
- 作用･反作用の法則を満たす
- 質点系からの引力はベクトル和

$$\vec{F}_{12} = -G\frac{m_2 m_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2}\left(\frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}\right)$$

$$\vec{F}_{21} = -G\frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2}\left(\frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}\right) = -\vec{F}_{12}$$

$$\vec{F}_0 = -G\frac{m_1 m_0}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_1|^2}\left(\frac{\vec{r}_0 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_1|}\right) - G\frac{m_2 m_0}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_2|^2}\left(\frac{\vec{r}_0 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_2|}\right)\cdots$$

Q 6.5

[A] 2個の鉛の球（100 g）を中心間の距離10 cmだけ離したとき，万有引力の大きさは？

[B] 原点に質点M，位置$\vec{r} = (x, y, z)$に質点mがあるとき，mが受ける万有引力のx成分を書け.

[C] 質量mの２個の質点が$\mathrm{P}_1(a, 0, 0)$と$\mathrm{P}_2(-a, 0, 0)$にある. $\mathrm{P}_0(0, 0, c)$にある質点Mが受ける万有引力を成分で表せ.

A 6.5

[A] $F = (6.7 \times 10^{-11}\ \mathrm{N\ m^2/kg^2}) \frac{(0.1\ \mathrm{kg})^2}{(0.1\ \mathrm{m})^2} = 6.7 \times 10^{-11}\ \mathrm{N}$

[B] $\vec{F} = -G\frac{mM}{r^2}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) = -G\frac{mM}{r^3}\vec{r},\ \ F_x = -G\frac{mM\,x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$

[C] $\vec{r}_0 - \vec{r}_1 = (-a, 0, c), \vec{r}_0 - \vec{r}_2 = (a, 0, c)$

$$\vec{F}_0 = -G\frac{mM}{|\vec{r}_0-\vec{r}_1|^2}\left(\frac{\vec{r}_0-\vec{r}_1}{|\vec{r}_0-\vec{r}_1|}\right) - G\frac{mM}{|\vec{r}_0-\vec{r}_2|^2}\left(\frac{\vec{r}_0-\vec{r}_2}{|\vec{r}_0-\vec{r}_2|}\right)$$

$$= -GmM\left\{\frac{(-a,0,c)}{(a+c^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{(a,0,c)}{(a+c^2)^{\frac{3}{2}}}\right\} = -GmM\frac{(0,0,c)}{(a+c^2)^{\frac{3}{2}}}$$

例題 6.5

重力加速度の内容

重力加速度を用いて重力の大きさを表す: $F = mg$

万有引力の大きさ: $F = m\frac{GM}{R^2}$, 地球の質量M, 半径R

仮定:地球の質量分布が球対称

$$g = \frac{GM}{R^2}$$

gとGを実験で求め, 地球半径 Rを観測で決めると地球の質量Mを推定できる.

例題 6.6

静止衛星

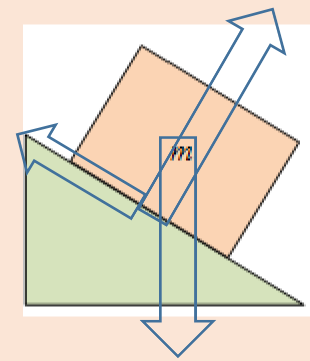
- 赤道上空，高度一定の円軌道，軌道半径 r
- 地球の自転と同じ角速度$\omega = \frac{2\pi}{T}$で回転 ($T = 24\ \mathrm{h}$)
- 円運動の向心力 $mr\omega^2$ ＝ 万有引力 $G\frac{mM}{r^2}$

ケプラーの法則：公転半径の３乗と周期の２乗の比が一定

$$mr\omega^2 = G\frac{mM}{r^2} \quad \rightarrow \quad r^3\omega^2 = (2\pi)^2\frac{r^3}{T^2} = GM = \text{一定}$$

[フリー・ボディー・ダイアグラム]

物体に加わる力をすべて描きこんだ図



力を及ぼしている他の物体は描かない

物体の運動状態の変化を観察する

加わる力のベクトル和：並進

トルクの和：回転