【単振動の運動方程式の解】

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx\to\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{k}{m}x=-\omega^2x,\ \ \omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$x=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3+a_4t^4+\cdots$$

$$x''=2\cdot 1a_2+3\cdot 2\,a_3t+4\cdot 3\,a_4t^2+\cdots$$

$$2a_2=-\omega^2a_0,\qquad 3\cdot 2a_3=-\omega^2a_1,\quad 4\cdot 3a_4=-\omega^2a_2,\cdots$$

$$a_0=x(0),a_1=x'(0),a_2=-\frac{\omega^2}{2!}a_0,a_3=-\frac{\omega^2}{3!}a_1,a_4=+\frac{\omega^4}{4!}a_0$$

$$x(t)=a_0\left(1-\frac{\omega^2}{2!}t^2+\frac{\omega^4}{4!}t^4-\cdots\right)+\frac{a_1}{\omega}\left(\omega t-\frac{\omega^3}{3!}t^3+\cdots\right)$$

$$=x(0)\cos\omega t+\frac{x'(0)}{\omega}\sin\omega t$$

$\frac{d^2x}{dt^2}=-\omega^2x$の解 $\sin\omega t$と$\cos\omega t$は線形独立な解である

$\forall t,\sin\omega t=c\cos\omega t\ \left(\frac{\sin\omega t}{\cos\omega t}=c\right)$となる$c$は存在しない

$$\forall t\quad A\sin\omega t+B\cos\omega t=0\to A=B=0$$

線形独立な２つの解の線形結合で一般解があらわされた

線形従属　$f_1=c\,f_2$　と書ける

一般に，２階線形微分方程式の線形独立な２つの解f_1,f_2を知っているとき，一般解は$f=A\,f_1+B\,f_2$である．

線形微分方程式：

定義から$f=A\,f_1+B\,f_2$は解である

$f_1(t)$の関数の形から$f_1{}'(t)$の関数の形が決まる

$x(t)=A\,f_1(t)$とおけば，微分方程式の解として$x(0)$の値を自由に選べるが，$x'(t)=Af_1{}'(t)$を自由に決めることはできない．$x(t)=Bf_2(t)$についても同様である．つぎに

$$x=A\,f_1+B\,f_2$$

をつくる．

もしf_1とf_2が従属なら，$f_1=cf_2$とおけるので

$$x=\left(A+\frac{B}{c}\right)f_1=Cf_1$$

となり,$x(0)$と$x'(0)$を独立に決めることができない．

$$\begin{cases}x(0)=A\,f_1(0)+B\,f_2(0)\\x'(0)=A\,f'_1(0)+B\,f'_2(0)\end{cases}\to\begin{pmatrix}f_1(0)&f_2(0)\\f_1'(0)&f_2'(0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x(0)\\x'(0)\end{pmatrix}$$

より

$$\det\begin{pmatrix}f_1(0)&f_2(0)\\f_1'(0)&f_2'(0)\end{pmatrix}\neq 0$$

ならば$\begin{pmatrix}x(0)\\x'(0)\end{pmatrix}$に応じて$\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$が存在する．

線形従属のときは det =0 となる．線形独立のときは≠0　となる

ロンスキー

【物理現象としての単振動】

用語：

振幅，周期，振動数，角振動数，位相，初期位相

グラフ：

速度と加速度

円運動との対比

振動数と質量・ばね定数の関係

次元解析

物理

振動数は振幅によらず同じ（運動として理解）

例題６．４

軸を下向きにとる,原点をばねの自然長さ

重力 $m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - kx = -k\left(x - \frac{m}{k}g\right)$

座標変換：$X = x - \frac{m}{k}g$

新しい原点： $X = 0,\ kx = mg$（つりあいの位置）

$$\frac{d}{dt}X = \frac{d}{dt}x,\ \ \frac{d^2}{dt^2}X = \frac{d^2}{dt^2}x \rightarrow \quad \frac{d^2}{dt^2}X = -kX$$

ばねの固さ

束ねると固くなる

縦につなげると柔らかくなる

【万有引力】

２つの質点が引き合う力

作用反作用の法則にしたがう

距離の２乗に反比例する

質量の積に比例する

質点mが原点にある，Mが$\vec{R}$にある. M が受る力

$\vec{F}(\vec{R}) = \left(-\frac{\vec{R}}{|\vec{R}|}\right) G\frac{mM}{|\vec{R}|^2} = -G\frac{mM}{R^2}\frac{\vec{R}}{R} = -G\frac{mM}{R^3}\vec{R} = -G\,mM\left(\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}^3}, \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}^3}, \frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}^3}\right)$

質点 m が$\vec{r}$にある，Mが$\vec{R}$にある． M が受ける力

$$\vec{F}(\vec{R}) = -G\frac{mM}{|\vec{R}-\vec{r}|^2}\frac{\vec{R}-\vec{r}}{|\vec{R}-\vec{r}|}$$

質点系：重ね合わせの原理

$$\vec{F}(\vec{R}) = -G\sum\frac{m_k M}{|\vec{R}-\vec{r_k}|^2}\frac{\vec{R}-\vec{r_k}}{|\vec{R}-\vec{r_k}|} \rightarrow -GM\iiint\frac{(\vec{R}-\vec{r})\rho(\vec{r})}{\left|\vec{R}-\vec{r}\right|^3}\,dxdydz$$

球対称の質量分布をもつ球の外側は，中心に全質量をもつ質点があるのと同じ

〃　　　　球殻の内側は，重力が 0 になる

地表付近の重力

$$F = G\frac{mM}{R^2} = m\frac{GM}{R^2} = mg \ \rightarrow\ m\frac{GM}{(R+h)^2} = m\frac{GM}{R^2\left(1+\frac{h}{R}\right)^2} \simeq m\frac{GM}{R^2}\left(1 - \frac{2h}{R}\right)$$

$$g = GM/R^2$$

数値例

不動の中心に向かう万有引力による運動の軌跡は，その中心を含む平面内の円，楕円，双曲線，放物線に限られる．

月の運動：

軌道半径 r,　地球半径 R

$$F = G\frac{mM}{r^2} = m\,r\omega^2 = mr\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \rightarrow \quad GM = r^3\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{r^3}{T^2}(2\pi)^2$$

$g = GM/R^2$　*G もMわからないのでgをつかう*

$$GM = gR^2 = \frac{r^3}{T^2}(2\pi)^2$$

静止衛星

地球の中心を含む平面内で回転する．地上から静止して見えるのは赤道上空だけ．

ケプラーの法則

第 1 法則（楕円軌道の法則） 惑星は、太陽をひとつの焦点とする楕円軌道上を動く。

第 2 法則（面積速度一定の法則） 惑星と太陽とを結ぶ線分が単位時間に描く面積は、一定である

第 3 法則（調和の法則） 惑星の公転周期の 2 乗は、軌道の長半径の 3 乗に比例する。