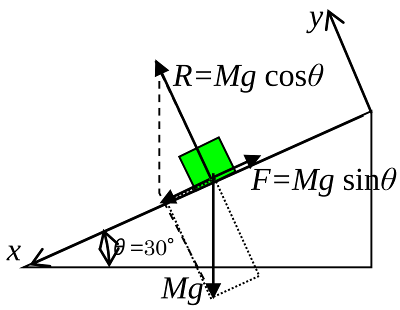
６章

1. 斜面上に質量 M の物体を置き、斜面と水平面のなす角度を徐々に大きくしていったら、30°のときに物体は滑り出した。

１）斜面とこの物体との間の静止摩擦係数はいくらか。

２）この物体を斜面と同じ材質の机の上に置き、質量の無視できる糸に質量 m のおもりをつなぎ、机の角の滑車を通しておもりをつるした（図 6.5）。物体が動き出すには m がいくら以上でなければならないか。

３）この限界よりわずかに（無限小だけ）重いおもりをつないだとき、動き出した後の加速度の大きさはいくらか。動摩擦係数を μ'=0.40 とする。



1）教科書 87 ページを復習する：物体には鉛直下向きに重力 Mg、斜面からの摩擦力 F（斜面方向）および垂直抗力 R（斜面に直角な方向）が加わる。斜面の方向を x 軸、斜面に垂直な方向を y 軸とする。斜面の角度を θ とすると、物体の運動方程式は

$$M\frac{d^2x}{dt^2}=Mg\sin\theta-F,\qquad M\frac{d^2y}{dt^2}=R-Mg\cos\theta$$

である。第二式は斜面にそって運動するかぎり、静止でも運動中でも右辺は 0 である。物体が斜面上で静止しているためには(はじめに静止していたから初速度は 0 であり) x 軸方向の加速度が 0 となる必要がある。滑り出す直前までは第一式の右辺が 0 である。以上をまとめると

$$Mg\sin\theta-F=0 \quad \text{および} \quad R-Mg\cos\theta=0$$

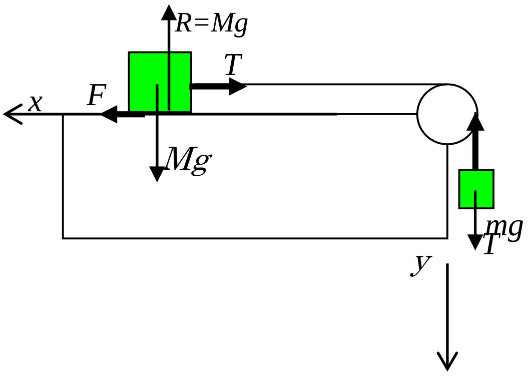
となる。摩擦力を垂直抗力でわると

$$\frac{F}{R}=\frac{Mg\sin\theta}{Mg\cos\theta}=\tan\theta$$

となり、斜面の角度により比が変化する。静止を保った状態で最大の $\theta=30°$ のとき摩擦力は最大となり、最大静止摩擦係数 μ の定義式（6.9）から

$$\mu=\frac{\text{最大の}F}{R}=\tan 30°=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{1.73}=0.58$$

(題意からは、数値を何桁まで与えるべきか不明だが、動摩擦係数が有効数字２桁なので、これにあわせた。もし角度の測定値 30°が「29.5°と 30.4°の間」を意味するなら μ の値は 0.566 と 0.587 すなわち「0.57 と 0.59」の間ということになり有効数字二桁よりも少しだけ精度が悪くなる)。



2） 物体 M に加わる力は、重力 Mg および机の面からの垂直抗力 R（重力をちょうど打ち

６章

消して机の面に沿う運動を可能にする。したがって大きさは Mg）および摩擦力 F（水平方向）、そして糸からの張力Ｔ（水平方向）である。

物体 m に加わる糸の張力も同じ大きさ T で上向き。糸が静止しているとき（加速度が０のとき）は、糸の両端に現れる張力は等しい。なぜなら、糸には、各張力と同じ大きさで逆向きの力が外部から作用している（作用反作用の法則）ので、両端の張力が異なるとすると外部から作用する力の合力も０でなくなり、糸は加速度運動することになるから。もし糸の質量が無視できるときは、加速度運動中であっても両端の張力は等しいと考えられる。さもないと、糸の加速度（力/質量）が無限大になってしまう。

例題 6.2 の図 6.6 と同様に座標軸をとり物体Mの位置を x、物体 m の位置を y とする。Ｍの水平方向の運動方程式は

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = F - T$$

物体ｍの鉛直方向の運動方程式は

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = mg - T$$

である。静止状態では加速度が０だから、これらの式の右辺が０となる。よって

$$F = T = mg$$

最大静止摩擦力を $F_{\max}$ とすると、最大摩擦静止係数 μ を用いて

$$F_{\max} = \mu R = \mu Mg$$

静止を続けるためには、摩擦力が最大静止摩擦力以下である必要がある。すなわち

$$F = T = mg \le F_{\max} = \mu Mg$$

動き出す限界（直前）では、不等号が等号となり

$$mg = \mu Mg \qquad \text{すなわち} \qquad m = \mu M = \frac{1}{\sqrt{3}}M$$

である。このｍより大きければ動き出す。

$1/\sqrt{3}$ の値は（たぶん）有効数字２桁で求めればよい。1）でも同じだが、とくに数字の精度を気にしていないと思われるときは、$1/\sqrt{3}$ をそのまま残しておいてもかまわない。

3）滑車からぶら下がっているほうの質量は「わずかに（無限小だけ）重いおもりをつないだ」から、ｍのままでよい。そうすると、加速度運動しているときの運動方程式も上と同じく（糸の質量を無視すると）

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = F - T \quad \text{および} \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = mg - T \qquad (@)$$

摩擦力は、動摩擦係数 $\mu' = 0.40$ を用いて

$$F = \mu' Mg = 0.40Mg$$

である。

６章

運動方程式から、この段階では値が不明の張力を消去するため、各辺の差をとると

$$M\frac{d^2x}{dt^2}-m\frac{d^2y}{dt^2}=(F-T)-(mg-T)=F-mg$$

一方、例題 6.2 で導いたとおり、物体mとMが「ひもの長さ $x+y=d$ =一定」という条件で運動するので

$$\frac{d^2}{dt^2}(x+y)=\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{d^2y}{dt^2}=0 \qquad \text{すなわち} \qquad \frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{d^2y}{dt^2}$$

であるから、変数を x だけにすることができ

$$M\frac{d^2x}{dt^2}-m\frac{d^2y}{dt^2}=M\frac{d^2x}{dt^2}-\left(-m\frac{d^2x}{dt^2}\right)=(M+m)\frac{d^2x}{dt^2}=F-mg=(\mu' M-m)g$$

となる。こうして

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{F-mg}{M+m}=\frac{\mu' Mg-mg}{M+m}=\frac{0.4Mg-\frac{1}{\sqrt{3}}Mg}{\frac{1}{\sqrt{3}}M+M}=\frac{0.4-\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{\sqrt{3}}+1}g$$

$$=\frac{0.4\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}g=-0.112\times 9.8=-1.1\mathrm{m/s^2}$$

を得る。加速度の大きさは 1.1m/s^2。

なお、ぶらさげたおもりの質量が $m=\frac{1}{\sqrt{3}}M$ よりも（「わずかに（無限小だけ）重い」のではなく）十分に重くても、$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{F-mg}{M+m}=\frac{\mu' Mg-mg}{M+m}$ のところまで結論は同じである。増加分を無限小にした理由は「動き出す必要がある」ことに加えて「（1）の計算結果 $m=\frac{1}{\sqrt{3}}M$ をそのまま使いたかった」こと。

2. 自転車を一生懸命こいでいる。地面から前輪と後輪にはたらく摩擦力の向きはどの方向か。

とくに付け加えることはない。（たとえば氷の上で）地面がとタイヤに摩擦力がはたらかないときは、自転車の動きとは無関係に「前輪は回転せず」「後輪は空転する」だろう。自転車の進行にともなって前輪が回転するのは摩擦力のせい、ペダルをこいで後輪が空転しないのも摩擦力のせいである。自転車に乗っている人から見て「後ろに動いていく地面」が前輪を回転させるのだから、前輪の接地部分には後ろ向き（自転車の進行方向と逆向き）の摩擦力が加わる。後輪が空転しないように押さえる摩擦力の向きは自転車の進行方向を向く。

６章

3.　**質量 100 kg の物体を、1.0 m あたり 1.0 kg のロープで鉛直上方に加速度 0.2 m/s^2 で引き上げている。物体から 2.0 m の所でのロープの張力の大きさはいくらか。**

考えている点より下のロープと物体を合わせた質量を m とする。この m について運動方程式をつくるために作用する力を考えると、重力 mg（下向き）とこの点でのロープの張力 T（上向き、ロープの「この位置よりも上側」の部分が「下側」の部分を引く力）だけである。この質量 m が上向きに加速度 a で運動するとき、運動方程式は

$$ma = T - mg$$

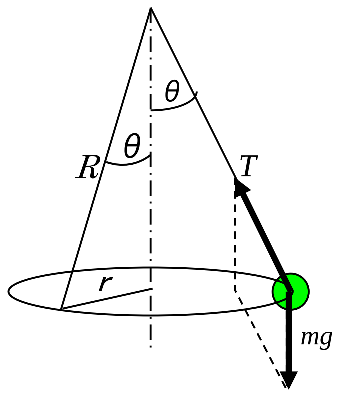
である。よって

$$T = ma + mg = m(a+g) = (100\,\mathrm{kg} + 1.0\,\mathrm{kg/m} \times 2.0\,\mathrm{m}) \times (0.2\,\mathrm{m/s^2} + 9.8\mathrm{m/s2})$$

$$= (102\,\mathrm{kg}) \times (10.0\mathrm{m/s^2}) \quad = 1.02 \times 10^3\,\mathrm{N}$$

最右辺は有効数字３桁について。物体の質量 100kg は 3 桁の精度があるだろうと考える。すなわち 1 の位まで信頼できる。これに 2 桁の精度の 1.0×2.0 kg = 2.0kg を加えるのだが、いくら 2.0kg が小数点以下 1 位まで信用できるとしても、もとの 100kg が小数点以下について信頼できないから全体の質量を 102.0 kg と言うわけにはいかない。こうして 102kg, すなわち有効数字 3 桁となる。一方、与えられた加速度 0.2m/s^2 は有効数字 1 桁だが重力加速度 9.8m/s^2 の最終桁のところに加わるので 10.0m/s^2 という値は 3 桁の精度がある。有効数字 3 桁と 3 桁の掛算なので、結果も 3 桁信頼できるはず。

4.　**長さ R の糸の一端を固定し他端に質量 m のおもりをつるす。そこでおもりを水平面内で円運動させたところ、糸と鉛直線のなす角が θ であった。糸の張力 T とおもりの角速度 ω を求めよ。（これを円錐振り子という。）**



おもりにはたらく力は糸の張力と重力だけと考えてよい。重力はどんな運動をしていても一定だが、張力は拘束力であり、運動のしかたで異なる大きさになる。この問の拘束条件として、おもりは(水平面内で運動するということは)鉛直方向に動かない。したがって張力と重力の合力ベクトルの鉛直方向成分が 0 となる。式であらわすと

$$T\cos\theta - mg = 0 \quad よって \quad T = \frac{mg}{\cos\theta}$$

となり張力の大きさを他の量で表すことができた（これで拘束力であるために判然としなかった張力を正面から用いることができるようになった）。

角速度を求めるに円運動に注目する。おもりにはたらく力の合力（鉛直成分は 0 だが）の

水平成分は糸の張力の水平成分であり、$T\sin\theta$ という大きさを持つ。これが水平面内の等角速度円運動の向心力となる。おもりの回転半径を r とすると、この円運動の（速さは $v=r\omega$）加速度の大きさは $v\omega=r\omega^2$、加速度の向きは中心に向かう。この加速度を発生するのが向心力 $m\times r\omega^2$ であり、張力の水平成分がこれを与える。すなわち

$$T\sin\theta=mr\omega^2$$

この式で、糸の長さ R と円の半径 r の関係

$$r=R\sin\theta$$

を右辺に、張力を重力で表した式 $T=\dfrac{mg}{\cos\theta}$ を左辺に代入すると

$$\frac{mg}{\cos\theta}\sin\theta=mR\omega^2\sin\theta \quad すなわち \quad \frac{g}{\cos\theta}=R\omega^2 \quad あるいは \quad \omega^2=\frac{g}{R\cos\theta}$$

を得る。よって

$$\omega=\sqrt{\frac{g}{R\cos\theta}}$$

左辺の角速度の単位は rad/s すなわち[時間]$^{-1}$の次元を持つ。右辺の次元も[時間]$^{-1}$となることを各自確かめよ。次元の解析から、円錐振り子の角速度が、質量 m、糸の長さ R、重力加速度 g、角度 θ だけで決まることが分っているなら、$\omega\propto\sqrt{\dfrac{g}{R}}\times f(\theta)$ という形にならざるを得ないことがわかる。$f(\theta)$ は θ の関数を表すが、次元の解析からだけでは関数の形を決めることはできない。

5. **バネ定数 k のバネに質量 m の物体をつなぎ、水平面内で振動させる。時刻 $t=0$ にバネの伸び 0 で静止していた物体を、はじいて速度 V を与えた。任意の時刻 t ($t\geqq 0$)での物体の位置と速度を求めよ。**

水平面内の運動に関して、物体が受ける力はバネの復元力だけであり、物体は直線上を運動する。この直線を x 軸とし、原点を初期位置（バネの伸びが 0 のときの物体の位置）とする。時刻 t で物体は位置 $x(t)$ にあるとすると、その運動方程式は（バネはフックの法則に従うとする）式(6.29)と同じ

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx$$

となる。$\omega_0=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ で定義される定数を用いると、上の微分方程式は（両辺をmでわり）

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\omega_0^2x \quad あるいは \quad 式(6.31)と同じ \quad \frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0^2x=0 \qquad (◎)$$

となる。この式（2 回微分すると同じ形の関数の定数倍、ただし符号が逆になるという

式）が成り立つ$x(t)$は

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) \qquad （◎◎）$$

のように、角振動数がω₀の単振動を表すコサイン関数とサイン関数の和で表される。サインとコサインをどのような大きさで加えるか（A と B の値）は、どんな速さで振動するか（あるいは、どんな振幅で振動するか）、どんな時刻に最大振幅の位置（あるいはバネの伸びが 0 の位置）を通過するかにより決まってくる。この段階では決まってない（未定）なので、A,B を未定定数という。逆に A,B を適切な値に選べばどんな場合でも表せるので（◎◎）を微分方程式（◎）の「一般解」と呼ぶ。

この問では、初速度が与えられているし、任意の時刻の速度も求めるので、速度の一般的な式を書くと、（◎◎）を時間で微分して

$$v(t) = -\omega_0 A\sin\omega_0 t + \omega_0 B\cos\omega_0 t = \omega_0(-A\sin\omega_0 t + B\cos\omega_0 t) \qquad （◎◎◎）$$

初期条件（時刻 t ＝ 0 における位置や速度）は、題意より

伸びが 0 の位置＝原点にいる： $x(0) = 0$

速度が V； $v(0) = V$

式(◎◎)および(◎◎◎)を用いてこれらを具体的に書くと

$$x(0) = A\cos(0) + B\sin(0) = A\times 1 + B\times 0 = A \quad より \quad A = 0$$

$$v(0) = \omega_0(-A\sin(0) + B\cos(0)) = \omega_0 B \quad より \quad \omega_0 B = V \quad すなわち \quad B = \frac{V}{\omega_0}$$

となる。以上の結果を使って、題意の条件を満たす特定の運動を表す解（特解）を書くと

$$x(t) = 0\times\cos\omega_0 t + \frac{V}{\omega_0}\times\sin\omega_0 t = \frac{V}{\omega_0}\sin\omega_0 t$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \omega_0\left(-0\times\sin\omega_0 t + \frac{V}{\omega_0}\cos\omega_0 t\right) = V\cos\omega_0 t$$

となる。

6. **水素原子は陽子（質量1.67×10^{-27}kg）のまわりを電子（質量9.1×10^{-31}kg）が半径5.3×10^{-11}m の円運動をしているというモデルで多くの性質が説明できる。このとき両者の間に電気的引力8.2×10^{-8}N がはたらいている。両者の間にはたらく万有引力と電気的力の比を求めよ。**

巻末の解答に付け加えることはない。

このモデルで電子がどんな速さで円運動をするか調べておこう。ただし電子の軌道の半径

６章

は $a_0 = 0.053\times10^{-9}\,\mathrm{m}$ であることが知られている。回転の角速度をωとすると、加速度は

$a_0\omega^2$ である．電気的な引力 F がその向心力となっているから

$$F = ma_0\omega^2 \tag{0.1}$$

である．よって

$$\omega = \sqrt{\frac{F}{ma_0}} = \sqrt{\frac{8.2\times10^{-8}\,\mathrm{N}}{\left(9.1\times10^{-31}\,\mathrm{kg}\right)\left(0.053\times10^{-9}\,\mathrm{m}\right)}} = 4.1\times10^{16}\,\mathrm{rad/s} \tag{0.2}$$

となる．単位の $\mathrm{rad/s}$ はラジアン毎秒を表す．２πでわり回転数（円運動を横から見ると、電子の振動数）になおすと

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 0.65\times10^{16}\,\mathrm{Hz}$$

となる。アンテナの中で電子が振動するとその振動数で光が放出される。（原子の中では少し事情がちがい、振動していても光が放出されるとは限らない。なぜなら、エネルギーを光の形で放出すると動きが鈍くなった電子は陽子に近づき、ついには原子がつぶれてしまうはずだが、そうはなっていない。だが、ともかく）この振動数の光は紫外線である。

7.　高度 1 万メートルの上空を飛ぶ飛行機の中で重力加速度を測定した。地上で測定した値との差は、地上での値の約何%か。

巻末の解答に付け加えることはないが、一般的な式をつくるところから始めよう。

飛行機の高度を h とし地球の半径を R とする。地球が「球」だとすると（より正確には、質量の分布が球対称＝地球をたくさんの同心球殻に分解したとすると、各球殻はどこでも同じ密度）、地球と他の物体の間の万有引力は「地球の中心に全質量が集まった」として万有引力の法則を用いればよいことが積分計算からわかる。地球の質量をM、上空の物体（質点とする）の質量をｍ（飛行機の機体との間の万有引力は無視）とすると、この物体が高さｈの上空（したがって地球の中心から距離R+h）で地球から受ける万有引力の大きさは

$$F(h) = G\frac{mM}{(R+h)^2}$$

となる。ここで、力をF(h)と書いたのは、高度により大きさが異なることをあらわしたかったから。この万有力のもとで自由落下する物体ｍの運動方程式は、加速度をg(h)とすると

６章

$$F\left(h\right)=m\times g(h)$$

である。この g(h) が高度 h における重力加速度にほかならない。よって

$$g\left(h\right)=G\frac{M}{\left(R+h\right)^2}$$

となる。

　求める値は、地上(h=0) と上空の重力加速度の差を、地上の重力加速度で割ったものである。すなわち求める比を r と書くと

$$r=\frac{g\left(h\right)-g\left(0\right)}{g\left(0\right)}=\frac{g\left(h\right)}{g\left(0\right)}-1$$

$$=\frac{G\dfrac{M}{\left(R+h\right)^2}}{G\dfrac{M}{\left(R\right)^2}}-1=\frac{R^2}{\left(R+h\right)^2}-1=\left(\frac{R}{R+h}\right)^2-1$$

最右辺において $R=6400\,\mathrm{km}$ と $h=10000\,\mathrm{m=}10\,\mathrm{km}$ を代入して計算すると

$$\left(\frac{6400}{6400+10}\right)^2-1=\left(\frac{1}{1+\dfrac{10}{6400}}\right)^2-1=\frac{1}{1+2\times\dfrac{10}{6400}+\left(\dfrac{10}{6400}\right)^2}-1$$

ここで、最右辺の第一項に注目すると分母に現われる数字の間に

$$2\times\frac{10}{6400}\approx 3.1\times10^{-3}<<\left(\frac{10}{6400}\right)^2\approx 2.4\times10^{-6}$$

という著しく異なる大小関係があるので、

$$1+2\times\frac{10}{6400}+\left(\frac{10}{6400}\right)^2\approx 1+2\times\frac{10}{6400}$$

としても大きな差はないだろう（小数点以下 6 桁目より高い精度で論じるときは差が生じるが、この問の数字はそのような精度ではない）。つぎに

$$\frac{1}{1+2\times\dfrac{10}{6400}}=\frac{1}{1+\left(2\times\dfrac{10}{6400}\right)}\times\frac{1-\left(2\times\dfrac{10}{6400}\right)}{1-\left(2\times\dfrac{10}{6400}\right)}=\frac{1-\left(2\times\dfrac{10}{6400}\right)}{1-\left(2\times\dfrac{10}{6400}\right)^2}$$

６章

$$\approx \frac{1-\left(2\times\frac{10}{6400}\right)}{1} = 1-\left(2\times\frac{10}{6400}\right)$$

と簡略化する。最後の「≈」は、分母において$\left(2\times\frac{10}{6400}\right)^2 \approx 9.8\times10^{-6}$が 1 よりもずっと小さいことから

$$1-\left(2\times\frac{10}{6400}\right)^2 \approx 1$$

としたことによる。以上をまとめると

$$\left(\frac{6400}{6400+10}\right)^2 -1 \approx 1-\left(2\times\frac{10}{6400}\right)-1 = -\left(2\times\frac{10}{6400}\right)$$

こうして教科書巻末の計算が実行される。

ここで、「数の間に著しい大小関係があるとき、式を簡略化して計算しやすくし、しかも簡略化した（もととは異なる式で）計算しても答えはそれほど異ならない」というやりかたを学んだ。これは「近似計算」といわれる方法の 1 種である（とくにこれを 1 次近似という）。一般に、

$1 << x$　のときは　$(1+x)^r \approx 1+rx$

たとえば　$(1+x)^2 \approx 1+2x$　や　$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} \approx 1-x$　など

が成り立つ。では、どんな場合にこのような計算が許されるのだろうか。それは、これらの近似式を用いたときに捨て去った項（これらの例ではx^2）があってもなくても「気にならない」ときである。どんな大きさなら気にならないかは、場合により異なってくる。

もういちど、ここで行った近似計算を書いておこう。$\frac{h}{R} << 1$のとき

$$\left(\frac{R}{R+h}\right)^2 -1 = \frac{1}{\left(1+\frac{h}{R}\right)^2} -1 \approx \left(\frac{1}{1+2\times\frac{h}{R}}\right) -1 \approx \left(1-2\times\frac{h}{R}\right) -1 = -2\frac{h}{R}$$

としたので、$\frac{h}{R}$の 2 乗を数値的に計算しないですむ。それだけでなく「たとえば h がわずかに変化したら、この比がどの程度変化するか」というような問いにもすばやく答えられ

るようになり見通しがよい。実は、1 次近似は、なめらかな曲線をその接線（＝直線）だと思うことにほかならない。こうしたことは、テーラー展開（微分法のテーマのひとつ）を習うと理解がしやすいだろう。