Chapt. 05
運動方程式を解く

微分方程式をたてる
一般解を求める
初期条件を満たす特殊解を求める
情報を引き出す

§ 5.1 放物運動
[方針]

1. 物体に働く力を探しつくす
2. 状況をモデル化（理想化）する
3. 適切な座標系を選ぶ
4. 運動方程式をたてる
5. 一般解を求める
6. 初期条件から未定定数を決める（特殊解）
7. 必要な情報を引き出す

放物運動
[状況設定]

- 地上付近で小石を斜め上に放り投げる

- 質量 m
- 初期位置 地上 h
- 初速度の大きさV
- 射出角 水平からθ

- 到達高度: 重力加速度が一定
- 到達距離: 地表が平坦

放物運動
[方針 1&2:　力を探しつくし，モデル化]

- 接触力：空気　（床面上なら床 etc）
  - 風が吹いている
  - 抵抗
    - 進行方向の逆向きの力：空気の密度，物体の形状による
    - 速度に比例する力（超低速，超低密度の空気）
    - 速度の2乗に比例する力
  - 揚力
    - 進行方向に垂直な力
- 遠隔力：重力　（電磁気現象ならクーロン力 etc）
    - $\boxed{F = mg}$
      - 高高度だとgが小さい
      - 長距離だとgが変わる
- 慣性力：できる限り（近似的にでも）慣性系を選ぶ
  - 非慣性系
    - 地球の自転，公転 etc

放物運動
[方針 3:　座標系の設定]

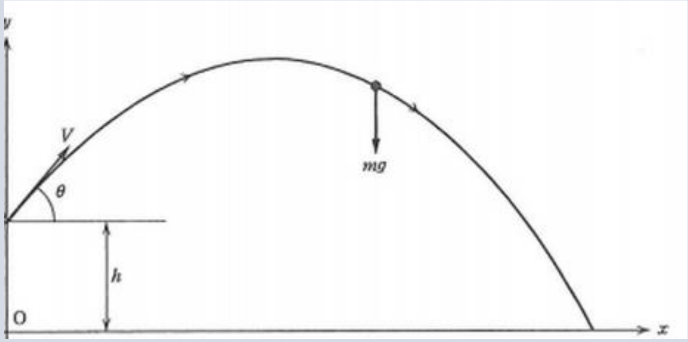
運動に特徴的な方向　→　軸（方程式が簡単，変数が分離）
- 唯一の力，重力の方向
- 初速度の方向

(運動が平面内になることを予測)

必ず図を描く

初期位置，初速度，力

予測できるなら軌道



地表に x軸，初速度の水平成分の向き

鉛直に y軸

放物運動
[方針 4&5&6]　運動方程式から一般解へ

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = 0$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = -mg$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = -g$$

まず微分方程式の一般解というものを求める．方程式(5.4)，(5.5)を速度 $v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，$v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ に対する微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{5.6}$$

$$\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = -g \tag{5.7}$$

とみなし，両式を1回不定積分すると速度に対して

$$v_x(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_{0x} \tag{5.8}$$

$$v_y(t) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -gt + v_{0y} \tag{5.9}$$

なる表式を得る．ここで v_{0x}, v_{0y} は不定積分で現れた未定定数(積分定数)である．これらが微分方程式(5.6)，(5.7)を満たす最も一般的な形である．これらを微分方程式(5.6)，(5.7)の一般解(general solution)という．

放物運動
[方針　6] 初期条件を満たす特殊解を求める

初期条件

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = h \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x(0) = V\cos\theta \\ v_y(0) = V\sin\theta \end{cases}$$

$t \neq 0$ でも OK

2階微分方程式
1変数につき
2個の未定定数

この条件を満たすように一般解に現れた未定定数を決めよう．式(5.8)，(5.9)に $t=0$ を代入し，初期条件と比べると

$$v_x(0) = v_{0x} = V\cos\theta \tag{5.13}$$

$$v_y(0) = v_{0y} = V\sin\theta \tag{5.14}$$

となって二つの積分定数 v_{0x}, v_{0y} が決まる．この結果と $t=0$ を式(5.10)，(5.11)に代入し，初期条件と比べると

$$x(0) = x_0 = 0 \tag{5.15}$$

$$y(0) = y_0 = h \tag{5.16}$$

となって残りの積分定数 x_0, y_0 が決まる．

このようにして題意を満足する解が，速度について

$$v_x(t) = V\cos\theta \tag{5.17}$$

$$v_y(t) = -gt + V\sin\theta \tag{5.18}$$

位置について

$$x(t) = (V\cos\theta)t \tag{5.19}$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (V\sin\theta)t + h \tag{5.20}$$

放物運動
[例題 5.1]　軌道を求める

- $x(t)$と$y(t)$からtを消去
  - 一方を用いて $t=$ ･･･として代入
  - $\sin^2\omega t+\cos^2\omega t=1$ などを用いることもある

- $f(x,y)=0$ あるいは $y=f(x)$の形にする

放物運動
[例題5.2] 最高到達点を求める

- 軌道のグラフの頂点

- $y(t)$の最大値を求める

- 最高点では鉛直方向の速度の符号が変わる
  - 速度のy成分が0：$\frac{dy}{dt} = 0$ を解き到達時刻を求め
  - $x(t), y(t)$に代入する

- エネルギー保存則を使えるなら，より簡単に計算できる

放物運動
[例題 5.3] 着地点についての情報

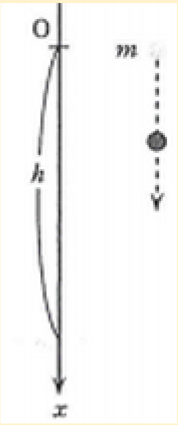
- $y(t) = 0$ を解いて $t > 0$ を求める
  - $t < 0$は投げる前の時刻
- $x(t)$に代入して飛距離を求める
- $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$に代入して衝突の速さを求める
  - エネルギー保存則を使えるなら，より簡単に計算できる

放物運動
[例題 5.4] 射撃の射出角を求める

- 地表($y = 0$)の所定位置($x = d$)に落ちるときのθ
  - 軌道の式に代入し θについて解く
- 射程
  - 届かない場所がある：射程外，θに解なし
- $h = 0$の場合（地表から打ち上げ，地表に落ちる）

§ 5.2 空気抵抗を受ける落下
[作用する力，座標軸]

- 空気抵抗
  - 向き：速度と逆方向
  - 大きさ：空気密度，温度，形状，速さなどに依存
    - 速度に比例：非常に薄い大気，非常に遅い速度
    - 速度の2乗に比例：日常的な大気，物体の大きさ，速さ
- 重力：鉛直下向き
  - 特別な方向
- 初速度が0
  - 運動は鉛直下向き
  - 座標軸も鉛直下向きにとる



[1] 速度に比例する抵抗
運動方程式をたてる

運動方程式:　$m\dfrac{d^2x}{dt^2} = mg - c\dfrac{dx}{dt}$

書き換え:　$\dfrac{dv}{dt} = g - \gamma v,\ v = \dfrac{dx}{dt},\ \gamma = \dfrac{c}{m}$

$$\frac{1}{v - \dfrac{g}{\gamma}}\frac{dv}{dt} = -\gamma$$

[1] 速度に比例する抵抗
運動方程式を解く

$$\int \frac{1}{v-\frac{g}{\gamma}}\frac{dv}{dt}dt = \int \frac{dv}{v-\frac{g}{\gamma}} = \log\left|v-\frac{g}{\gamma}\right|$$

$$= -\gamma \int dt = -\gamma t + C$$

$$\left|v-\frac{g}{\gamma}\right| = e^C e^{-\gamma t} \rightarrow \quad v = \frac{g}{\gamma} + Be^{-\gamma t}, B = \underbrace{\pm}_{※} e^C$$

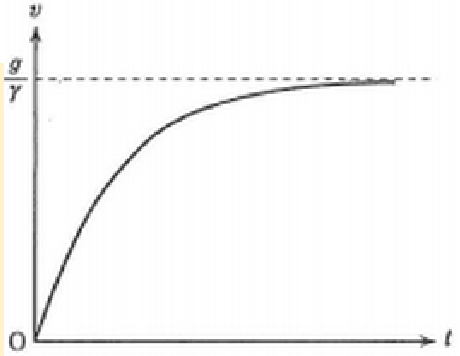
※ $v-\frac{g}{\gamma} = e^C e^{-\gamma t}\left(v > \frac{g}{\gamma}\right)\cdots$ 初速度0のときにはこの速度に到達しない、実現しない解。

$v-\frac{g}{\gamma} = -e^C e^{-\gamma t}\left(0 < v < \frac{g}{\gamma}\right)\cdots$ こちらを採用する。事実、初期条件に適合するのはこちら。

初期条件 $v(0) = 0 \ \rightarrow \ \ B = -\frac{g}{\gamma}$

特殊解 $\quad v(t) = \frac{g}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})$

[1] 速度に比例する抵抗
速度の時間的な変化を求める



- グラフを描く: $v(t) = \frac{g}{\gamma}(1 - e^{-\gamma t})$
- 極端な状況で値を調べる
  - $e^{-\gamma t} \simeq 1 - \gamma t \quad (\gamma t \ll 1), \ \lim_{t\to\infty} e^{-\gamma t} = 0$
  - 落下直後$(t \ll \frac{1}{\gamma}) \quad v \simeq \frac{g}{\gamma}\gamma t = gt, \quad g$の等加速度
    - v が小さいので抵抗がないのと同じ
  - 十分に時間がたつと $v_{\mathrm{term}} = \frac{g}{\gamma}$ 等速度になる：終速度
    - 重力と抵抗がつりあい，合力が0

[1] 速度に比例する抵抗
位置の時間的な変化を求める

$$x(t) = x(0) + \int_0^t v(t)\,dt \to \int_0^t v(t)\,dt$$

$$\int_0^t v(t)\,dt = \frac{g}{\gamma}\int_0^t (1 - e^{-\gamma t})\,dt = \frac{g}{\gamma}\left[t + \frac{1}{\gamma}e^{-\gamma t}\right]_0^t$$

$$= \frac{g}{\gamma}\left(t + \frac{1}{\gamma}e^{-\gamma t} - 1\right)$$

$$x(0) = 0$$

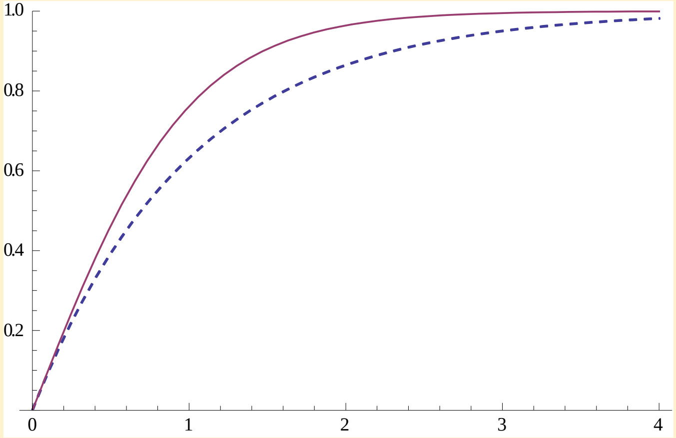
$$x(t) = \frac{g}{\gamma}\left(t + \frac{1}{\gamma}e^{-\gamma t} - 1\right)$$

[2] 速度の2乗に比例する抵抗

運動方程式:　$m\frac{dv}{dt} = mg - Kv^2$

運動の初期: $m\frac{dv}{dt} \simeq mg,\ v \simeq gt$

終速度:　$mg - Kv^2 = 0,\ \ v_{\mathrm{term}} = \sqrt{\frac{mg}{K}}$



点線:速度の二乗に比例する抵抗
実践:速度に比例する抵抗

終速度を同じとしてプロット

例題 5.5

- 物体が上昇中の空気抵抗

- 座標軸は下向きが正

  空気抵抗は下向き（正），速度は上向き（負）

$$m\frac{dv}{dt} = mg + (\underbrace{-cv}_{\text{正}})$$

$$m\frac{dv}{dt} = mg + \underbrace{Kv^2}_{\text{正}}$$

下降に転ずるとき，第２の場合の式は第2項の符号が変わる

§ 5.3 運動方程式を解く

- 運動の法則: $m\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)$
  - 右辺（物体に加わる力）を既知として，$\vec{r}(t)$を求める
  - 時間で二回積分する
    - 2組の積分定数を初期条件から定める: $\vec{r}(0), \vec{v}(0)$

- ニュートンの力学は決定論的

  力が分かっているとき，ある時刻の位置と速度が決まれば，物体のその後の運動は完全に決まる.

  だが

    - 非常に多くの質点からなる複雑な系では，初期条件のわずかな違いでその後の発展が大きく変わる場合がある（非線形系のカオス）．初期条件を詳細に制御できないときは，将来を予測できない.
    - 量子力学では現象が確率的に生じる，とする．ニュートンの力学は「ほとんど確実に起きる」ことを「絶対に起きる」と理想化している.