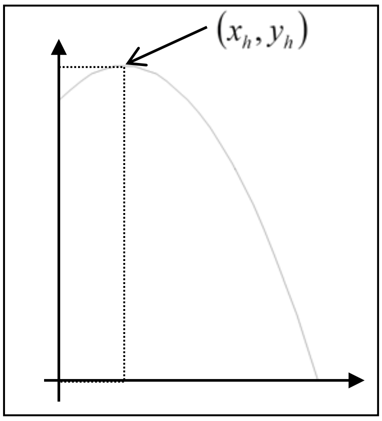
５章

1. 高さ h のところから速さ V、水平線との角度 θ で投げ上げられた小石が到達する最高点の座標 $(x_{\mathrm{h}}, y_{\mathrm{h}})$ を例題 5.2 で求めたが、その方法に代わって、例題 5.1 で求めた軌道の方程式(5.22)を用い高さの最大値を求める方法で求めよ。



軌道の方程式、式(5. 22)

$$y = -\frac{1}{2}\frac{g}{V^2\cos^2\theta}x^2 + (\tan\theta)x + h$$

の接線の傾きが 0 となるところが最大を与える (接線の傾きが 0 となるところが最大となる。放物線なので一般的には最大か最小のいずれかだが x^2 の係数が負で上に凸だから、最小はありえない) 。すなわち最高点では

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-g}{V^2\cos^2\theta}x + \tan\theta = 0$$

が満たされる。この関係を満たす x が求める x_h であり

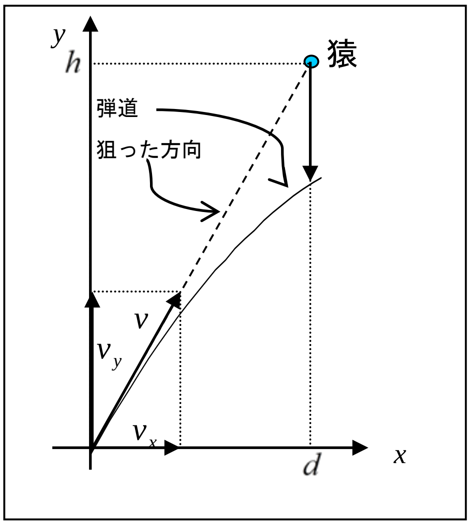
$$x_h = -\frac{V^2\cos^2\theta}{-g}\tan\theta = \frac{V^2}{g}(\cos\theta\tan\theta)\cos\theta = \frac{V^2}{g}\sin\theta\cos\theta = \frac{V^2}{2g}\sin 2\theta$$

また、この式を軌道の式に代入して得る y が求める y_h であり

$$y_h = -\frac{1}{2}\frac{g}{V^2\cos^2\theta}\left(\frac{V^2}{g}\sin\theta\cos\theta\right)^2 + (\tan\theta)\left(\frac{V^2}{g}\sin\theta\cos\theta\right) + h$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{V^2}{g}\sin^2\theta + \frac{V^2}{g}\sin^2\theta + h = \frac{V^2}{2g}\sin^2\theta + h$$

2. 木の枝に猿がぶら下がっている。良妻が猿をまっすぐ狙って猟銃を発射した。猿は発射の光を見た瞬間枝から手を放した。猿の運命やいかに。



図のように、銃口と猿の水平距離を d、銃口の位置を高さの基準（すなわち原点）として、猿の高さを h、弾丸の初速（初速度の大きさ）を v とする。猿をまっすぐ狙ったから、弾丸の初速度の水平成分 v_x と鉛直成分 v_y の比が $d:h$ となり

$$v_x = v\frac{d}{\sqrt{d^2+h^2}},\ v_y = v\frac{h}{\sqrt{d^2+h^2}}$$

弾丸が猿に当たるとすると、その位置は $x = d$ のところしかあり得ない(猿はまっすぐに落ちてくるから)。

５章

弾丸がその位置を通過する時刻は、弾丸の水平方向の運動が等速度だから

$$t=\frac{d}{v_x} \quad =\frac{d}{v\frac{d}{\sqrt{d^2+h^2}}}=\frac{\sqrt{d^2+h^2}}{v}$$

この時刻に猿と弾丸が同じ高さにあれば「あたり」である。猿は初期位置 h、初速度 0、鉛直方向の加速度 $-g$ の自由落下である。猿（モンキーの m を添え字にする）の高さの時間的な変化を表す式に上の時刻を代入して

$$y_m=h-\frac{1}{2}gt^2=h-\frac{1}{2}g\left(\frac{\sqrt{d^2+h^2}}{v}\right)^2=h-\frac{d^2+h^2}{2v^2}g$$

一方、弾丸（バレットの b を添え字にする）の鉛直方向の運動は、初期位置 0、初速度 v_y、加速度 $-g$ である。その高さの時間的な変化を表す式に同じ時刻を代入して

$$y_b=v_y t-\frac{1}{2}gt^2=v_y\frac{d}{v_x}-\frac{1}{2}g\left(\frac{\sqrt{d^2+h^2}}{v}\right)^2=\frac{h}{d}\times d-\frac{1}{2}g\frac{d^2+h^2}{v^2}=h-\frac{d^2+h^2}{2v^2}g$$

となり、この時刻において $y_m=y_b$ となる。よって弾は猿に当たる。

このように力づくの計算をするまでもなく式を観察すると答えを出せる。時間 t の間に猿が落下する距離は $\frac{1}{2}gt^2$、また弾丸の位置

$$y_b=v_y t-\frac{1}{2}gt^2$$

の右辺は、第一項「重力が 0 のときの弾丸の運動」すなわち「等速度（無重力）で直進の軌道を進むときの高さ」から、第二項「重力による初速度 0 の自由落下」を引いている、「狙いをつけた直進軌道から弾丸は $\frac{1}{2}gt^2$ だけ落下する」と言える。したがって、同じ時間内に猿の落下する距離と弾丸が直進軌道から落下する距離がともに $\frac{1}{2}gt^2$ で等しく、水平方向で同じ位置になったときに当たる。

余談：猿も弾丸も同じ重力加速度で落下するのだから、猿から見ると自分も弾丸も無重力状態にあり、弾丸は自分に向かって等速度直線運動をするように見える。綱が切れて落下するエレベーターの中では物体が「無重力状態になり浮き上がる」と見えるが、それはエレベーターの箱と物体が同じ加速度で運動するから。地球の引力で「周回軌道を回る宇宙船は無重力状態」というが、これも同じ話。

3. 半径 R のゴム球と、同じ半径で質量が 1/2 の中空のゴム球を同じ高さから同時に落下させた。どちらが先に地面に到達するか。

ほとんどの距離を終速度で落下するとすると

５章

> 1）抵抗力が速度に比例するとき、落下の所要時間の比はいくらか。
> 2）抵抗力が速度の 2 乗に比例するとき、落下の所要時間の比はいくらか。

題意は空気抵抗が無視できないときの物体の落下である。鉛直下向きに x 座標をとり、物体の質量を m、空気抵抗の大きさを R と書くと、運動方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=m\frac{dv}{dt}=mg-R \quad \text{両辺を m で割り} \quad \frac{dv}{dt}=g-\frac{R}{m} \qquad (◎)$$

となる。

R の値は物体の形と速度（および空気の性質＝密度や温度）により決まる。ここで

$$R=cv \qquad \text{あるいは} \qquad R=Kv^2$$

と書くとき、２つの球は形が同じだから空気の抵抗力を表す比例係数 c や K は両者について等しい。そうすると、運動方程式（◎）の右辺第二項 R/m の値は、同じ速度で比較すると、質量の大きな球のほうが小さくなる。よって右辺全体（すなわち加速度）としては、質量の大きな球のほうが（同じ重力加速度から小さな R/m を差し引くから）大きくなる。初速度 0 で運動を開始した後、加速度が常に大きければ、速度もより速やかに増加して先に地面に到達する。

ほとんどの距離を終速度で落下するとすれば、以上の議論はもっと簡単になる。終速度 v_{term} となると、もはや速度が変化しないので運動方程式において

$$\frac{dv}{dt}=0$$

が実現する。したがって v_{term} は

$$g-\frac{R}{m}=0 \qquad \text{すなわち} \quad R=mg$$

を実現するような速度である。質量が大きな球は mg が大きいので、終速度における R が大きく、終速度も大きい（R が速度の増加関数であることに注意せよ）。大きな終速度で落下を続けるのだから、より速く地面に到達する。

１）式(5.52)と同様に、$R=cv$ と $R=mg$ とを連立して終速度を求めると

$$cv_{term}=mg \quad \text{すなわち} \qquad v_{term}=\frac{mg}{c}$$

となり v_{term} は質量に比例する。軽い方は質量が半分なので終速度が半分になり、（「ほとんど」終速度で）落下するときの所要時間はほとんど 2 倍になる。

２）１）と同様に考えると、$R=Kv^2$ と $R=mg$ を連立して終速度に関する条件

$$Kv_{term}^2=mg \qquad \text{すなわち式(5.62)} \qquad v_{term}=\sqrt{\frac{mg}{K}}$$

を得る。これより v_{term} は $\sqrt{m}$ に比例するから、軽い方が $\sqrt{2}$ 倍時間がかかる。

５章

4. 体重が諸装備ふくめて 50 kg 重のスカイダイバーが飛行機から飛び出し、しばらくしたら落下速度が 180 km/h でほぼ一定になった。空気の抵抗力が Kv^2(v は速さ)で表されるとして比例定数 K を求めよ。

抵抗力が速度の 2 乗に比例するときの終速度は式(5. 62)

$$v_{term} = \sqrt{\frac{mg}{K}}$$

で与えられる。これより

$$K = \frac{mg}{v_{term}^2}$$

数値を代入すると

$$K = \frac{50\,\mathrm{kg} \times 9.8\,\mathrm{m/s^2}}{\left(\dfrac{180 \times 10^3\,\mathrm{m}}{3600\,\mathrm{s}}\right)^2} = \frac{50 \times 9.8}{\left(\dfrac{1}{2} \times 10^2\right)^2} = \frac{4 \times 50 \times 9.8}{10^4} = 2 \times 9.8 \times 10^{-2} = 0.196 = 0.20\,\mathrm{kg/m}$$

5. 飛行機から飛び出したスカイダイバー（体重が諸装備ふくめて 60 kg 重）がしばらくしたら落下速度がほぼ一定値 v になった。その後パラシュートを開きさらに減速してふたたび一定の落下速度 $v' = \frac{1}{20}v$ となった。速度一定の状況において、パラシュートを開いた後にスカイダイバーにはたらく空気の抵抗力は、パラシュートを開く前の何倍か。

パラシュートが開く開かないにかかわらず、速度が一定の状況とは「終速度に達したときのことであり

$$Kv_{term}^2 = mg \qquad \text{または} \qquad Kv_{term}^2 - mg = 0$$

すなわち空気の抵抗が、ちょうどスカイダイバーにはたらく重力を打ち消している。パラシュートの開閉いずれの場合も抵抗力は（重力と等しいのだから）等しい。1 倍。

6.地面から高さ h の所から質量 m の物体を水平方向に速度 v_0 で投げた。物体は速度に比例する抵抗力 $-m\gamma\mathbf{v}$ $(\gamma > 0)$ を受ける。水平方向を x 方向、鉛直上向きを y 軸の正方向として物体の速度（v_x, v_y）を投げてからの時間 t の関数として求めよ。十分時間がたったときの落下速度はいくらか。

まず、運動方程式をベクトルを用いて書くと

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -m\gamma\mathbf{v} - mg\mathbf{e}_y$$

５章

中辺は

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt}=m\frac{d}{dt}\left(v_x\mathbf{e}_x+v_y\mathbf{e}_y\right)=m\frac{dv_x}{dt}\mathbf{e}_x+m\frac{dv_y}{dt}\mathbf{e}_y$$

右辺は

$$-m\gamma\mathbf{v}-mg\mathbf{e}_y=-m\gamma\left(v_x\mathbf{e}_x+v_y\mathbf{e}_y\right)-mg\mathbf{e}_y=-m\gamma v_x\mathbf{e}_x+\left(-m\gamma v_x-mg\right)\mathbf{e}_y$$

であり、水平方向と鉛直方向の成分は座標軸方向の単位ベクトル $\mathbf{e}_x$ と $\mathbf{e}_y$ の係数を比較し

$$m\frac{dv_x}{dt}=-m\gamma v_x \qquad \text{および} \qquad m\frac{dv_y}{dt}=-m\gamma v_y-mg$$

である。両辺を m で割って書きかえ

$$\frac{dv_x}{dt}=-\gamma v_x \qquad \text{および} \qquad \frac{dv_y}{dt}=-\gamma v_y-g$$

となる。

教科書 79 ページにある微分方程式の解き方にならって、まず x 成分の方程式 $\frac{dv_x}{dt}=-\gamma v_x$ を解く。速度が時間の関数すなわち $v_x(t)$ であることに注意。両辺を v_x でわり

$$\frac{1}{v_x}\frac{dv_x}{dt}=-\gamma$$

とし両辺を時間で積分する。このとき左辺は積分記号内の dt が分子分母で打ち消されて

$$\int\left(\frac{1}{v_x}\frac{dv_x}{dt}\right)dt=\int\frac{dv_x}{v_x}$$

となる。この式の右辺は変数を t から v_x に置換した積分の式である。こうして、与えられた微分方程式が成り立つなら

$$\int\frac{dv_x}{v_x}=\int-\gamma\, dt$$

という関係も成り立つことがわかる。以上の議論を次のように言い直す。すなわち、与えられた微分方程式の両辺に dt を掛けて

$$\frac{dv_x}{v_x}=-\gamma\, dt$$

とし（この形の式は、左辺には t が表に顔をださず、右辺には v_x が顔をださない。独立変数と従属変数が等号の左右に分離された「変数分離」と呼ばれる状況）、各辺をそれぞれの変数について積分すると

$$\int\frac{dv_x}{v_x}=\int-\gamma\, dt$$

となる。

５章

　こうして、微分方程式$\dfrac{dv_x}{dt}=-\gamma v_x$を変数分離の形に書き換えると

$$\frac{dv_x}{v_x}=-\gamma\,dt$$

となる。つぎに微分方程式$\dfrac{dv_y}{dt}=-\gamma v_y-g$を変数分離の形に書き換えるには、両辺を

γv_y+gで割り

$$\frac{1}{\gamma v_y+g}\frac{dv_y}{dt}=-1 \qquad \text{すなわち} \qquad \frac{1}{v_y+\dfrac{g}{\gamma}}dv_y=-\gamma\,dt$$

となる。

　それぞれの式について、両辺を積分すると

$$\frac{dv_x}{v_x}=-\gamma\,dt \quad\to\quad \int\frac{dv_x}{v_x}=-\gamma\int dt \quad\to\quad \log|v_x|=-\gamma t+C \quad\to\quad v_x=e^{-\gamma t+C}=Ae^{-\gamma t}$$

および

$$\frac{1}{v_y+\dfrac{g}{\gamma}}dv_y=-\gamma\,dt \quad\to\quad \int\frac{1}{v_y+\dfrac{g}{\gamma}}dv_y=-\gamma\int dt \quad\to\quad \log\left|v_y+\frac{g}{\gamma}\right|=-\gamma t+C'$$

$$\to\quad v_y+\frac{g}{\gamma}=e^{-\gamma t+C'} \quad\to\quad v_y=Be^{-\gamma t}-\frac{g}{\gamma}$$

となる。最初に水平方向に投げたという初期条件、すなわち$t=0$で$v_x=v_0, v_y=0$を用いて A と B を決めることができる。実際

$$v_x(t)=Ae^{-\gamma t} \quad\to\quad v_x(0)=Ae^{-\gamma\times 0}=A\times 1=v_0 \quad\to\quad A=v_0$$

$$v_y(t)=Be^{-\gamma t}-\frac{g}{\gamma} \quad\to\quad v_y(0)=Be^{-\gamma\times 0}-\frac{g}{\gamma}=B-\frac{g}{\gamma}=0 \quad\to\quad B=\frac{g}{\gamma}$$

よって

$$v_x(t)=v_0\,e^{-\gamma t} \qquad \text{および} \qquad v_y=\frac{g}{\gamma}e^{-\gamma t}-\frac{g}{\gamma}=\frac{g}{\gamma}\left(e^{-\gamma t}-1\right)$$

十分に時間がたつと$e^{-\gamma t}\to 0$となるので、$v_x\to v_0\times 0=0$および$v_y\to\dfrac{g}{\gamma}(0-1)=-\dfrac{g}{\gamma}$となる。したがって速度ベクトルは$\left(0,-\dfrac{g}{\gamma}\right)$すなわち鉛直下向きに落下する。