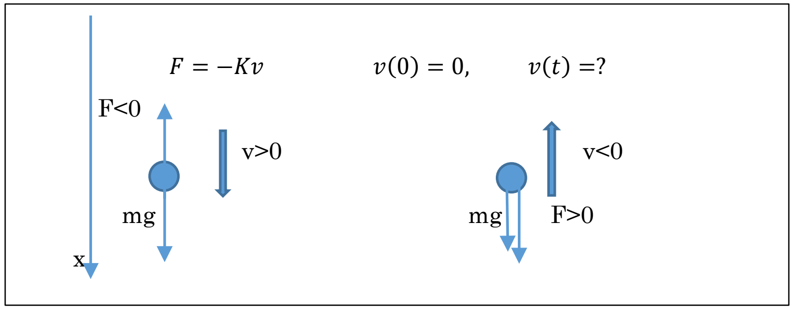
空気抵抗があるときの自由落下

【抵抗が速度に比例する場合】

1．絵を描く，座標と情報，記号を記入する



2．運動方程式を書く

$$m\frac{dv}{dt}=mg-Kv$$

3．極端な場合（で直観的に分かりやすい状況）を推察する

$$mg\ll Kv\rightarrow\quad\frac{dv}{dt}=g\rightarrow\quad v=gt\qquad\text{等加速度}$$

$$mg\simeq Kv\quad\rightarrow\quad v=\frac{mg}{K}\qquad\text{終速度（}m\text{に比例）}$$

単調増加　$0\leq v<\frac{\mathrm{mg}}{\mathrm{K}}$

4．解を求める

微分方程式

$$m\frac{dv}{dt}=mg-Kv\qquad(1)$$

の一般解は

$$v(t)=\frac{mg}{K}+C\,e^{-\frac{K}{m}t}\qquad(2)$$

であり，初期条件

$$v(0)=0$$

を満たす特解は

$$v(t)=\frac{mg}{K}\left(1-e^{-\frac{K}{m}t}\right)\qquad(3)$$

である．この解は項目 3 の極端な場合の推察と合致する．実際，

$\frac{K}{m}t\ll 1$ のとき$v(t)\simeq gt$（$t\ll m/K$ は$mg\ll Kv$と同等になる）　(4)

また

$t\rightarrow\infty$のとき$v(t)\rightarrow\frac{mg}{K}$　(5)

（参考）上向きに投げあげたときの解法

$v(t)>0$ の場合 $v(0)=-|v_0|$を満たす特解は

$$v(t)=\frac{mg}{K}-\left(\frac{mg}{K}+|v_0|\right)e^{-\frac{K}{m}t}\qquad(6),$$

最高点に到達する時刻をt_0とする

$$\frac{mg}{K}=\left(\frac{mg}{K}+|v_0|\right)e^{-\frac{K}{m}t_0}$$

となり，そこから測った時刻をτとすると（$t=t_0+\tau$）

$$v(\tau)=\frac{mg}{K}-\left(\frac{mg}{K}+|v_0|\right)e^{-\frac{K}{m}(\tau+t_0)}=\frac{mg}{K}-\frac{mg}{K}e^{-\frac{K}{m}\tau}$$

となり$v(0)=0$の解が再現する．

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝【粘性抵抗と慣性抵抗】＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

（粘性抵抗）速度に比例

・静止した流体の中を速度 v で移動する物体

・流体の粘性により物体表面の流体は物体とともに移動する

・物体表面にまとわりついた流体（速度 v）はもともと静止していた

・この流体は物体から力を受けたので速度（従って運動量）をもつようになった

・流体が受けた力は v に比例する（運動量が変化するまでの時間が一定）

・物体には反作用として v に比例する力（粘性抵抗）が作用する

注：速度 v をもった流体は，いずれまたもとの静止状態にもどるが，このとき減速は流体内部の摩擦による．

（慣性抵抗）速度の 2 乗に比例

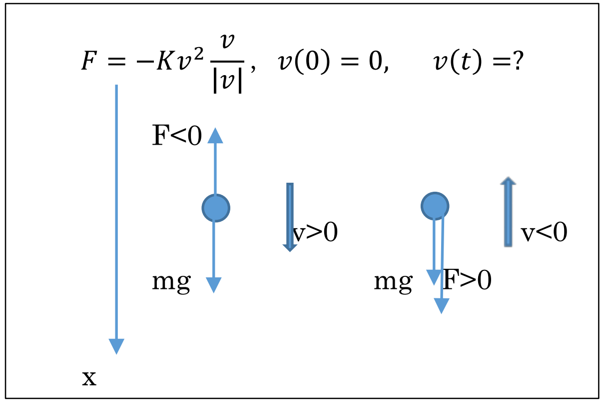
流体中を進む物体は前面にある流体を押しのけて進む．物体の後面には流体が付き従う（渦を巻いて）．前面にある速度 0 の流体が後面に移動して速度 v となったと考えてよい．この流体の質量は単位時間内に物体が押しのける体積に比例するので，v に比例する．物体が流体に与える運動量は v^2 に比例するので，物体は流体から v^2 に比例する抵抗（慣性抵抗）を受ける．

物体には粘性抵抗と慣性抵抗の両方が作用している．物体が大きく，速度が大きくなると慣性抵抗が主要な部分になる．人間が歩くとき，すでに慣性抵抗が主要な抵抗となる．粘性抵抗が主要な抵抗となるのは，霧の水滴のような小さい粒子が非常にゆっくりと沈降するような場合である．人間ほどの大きさの物体で粘性抵抗が主要になる状況は，宇宙から大気圏に突入するような極めて希薄な空気でしか起きない．

===

【抵抗が速度の 2 乗に比例する場合】　**例題 5.5　詳解**

1．絵を描く，座標と情報，記号を記入する



【$v(0) > 0$　（落下のとき：　$v(0) = 0$だから，こちらの場合になる）】

2．運動方程式を書く

$$m\frac{dv}{dt} = mg - Kv^2 \qquad (7)$$

$$v(0) = 0$$

3.　極端な場合を観察する

$$mg \gg Kv^2 \rightarrow \ \ v = gt$$

$$mg \simeq Kv^2 \rightarrow \ \ v = \sqrt{\frac{mg}{K}}$$

$$v(t): 0 \rightarrow \sqrt{\frac{mg}{K}} \quad \text{単調増加}$$

4. 解を求める

微分方程式

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{K}{m}v^2 = -\frac{K}{m}\left(v^2 - \frac{mg}{K}\right)$$

の一般解は

$$\left|\frac{v - \sqrt{\frac{mg}{K}}}{v + \sqrt{\frac{mg}{K}}}\right| = C\, e^{-2\sqrt{\frac{gK}{m}}t} \qquad (8)$$

であり，初期条件$v(0) = 0$を満たす特解は

$$v(t) = \sqrt{\frac{mg}{K}} \times \frac{1 - e^{-2\sqrt{\frac{gK}{m}}t}}{1 + e^{-2\sqrt{\frac{gK}{m}}t}} \qquad (9)$$

である．極端な場合は

$$v(t) = \sqrt{\frac{mg}{K}} \times \frac{1 - e^{-2\sqrt{\frac{gK}{m}}t}}{1 + e^{-2\sqrt{\frac{gK}{m}}t}} \simeq \begin{cases} gt \cdots \sqrt{\dfrac{gK}{m}}t \ll 1 \quad \left(i.e. \quad v \ll \sqrt{\dfrac{gK}{m}}t\right) \\ \sqrt{\dfrac{mg}{K}} \quad \cdots t \rightarrow \infty \end{cases}$$

となり項目 3 の観察と一致する．

（参考）$v(t)>0$ の場合

２．運動方程式

$$m\frac{dv}{dt}=mg+Kv^2, \quad v(0)=-|v_0|$$

３．概要

初期加速度：$g+\frac{K}{m}v_0^2$

$v(t):-|v_0|\rightarrow 0$　単調減少

一番上で $v(t)=0$

4. 運動方程式を解く

微分方程式

$$\frac{dv}{dt}=\frac{K}{m}\left(v^2+\frac{gm}{K}\right)$$

の解は

$$v(t)=\sqrt{\frac{gm}{K}}\tan\left(\sqrt{\frac{gK}{m}}t+c\right), \quad c=-\arctan\frac{|v_0|}{\sqrt{\frac{gm}{K}}}$$

であり，最上点に到達する時刻は

$$t_0=\frac{1}{\sqrt{\frac{gK}{m}}}\arctan\frac{|v_0|}{\sqrt{\frac{gm}{K}}}$$

である．

＝＝＝＝＝＝＝＝＝　数学　＝＝＝＝＝＝＝＝＝　数学　＝＝＝＝＝＝＝＝＝

【微分方程式(1)を解くために】

・最高階の係数を１にして式を見やすくする

$$m\frac{dv}{dt}=mg-Kv \qquad \rightarrow \qquad \frac{dv}{dt}=g-\frac{K}{m}v=-\frac{K}{m}\left(v-\frac{mg}{K}\right)$$

・独立変数 t と従属変数vを分離する（変数分離）

$$\frac{dv}{v-\frac{mg}{K}}=-\frac{K}{m}dt$$

・積分した形にする

$$\int\frac{dv}{v-\frac{mg}{K}}=-\frac{K}{m}\int dt$$

・積分を計算する

$$\log\left|v-\frac{mg}{K}\right|=-\frac{K}{m}t+c$$

ここで積分定数を c とした．１ページではe^{c}を C と書いている．

対数の引数は正となるべきだが，$v<\frac{mg}{K}$ なので絶対値をつけた．

・絶対値を外す（式(2)と同等の式になる）

$$v-\frac{mg}{K}=-e^c\, e^{-\frac{K}{m}t}$$

・初期条件を満たすようにcあるいはe^{c}を決める

$$0-\frac{mg}{K}=-e^c\, e^{-0}=-e^c \rightarrow \quad e^c=\frac{mg}{K}$$

・特解が得られる（式(3)）

$$v(t)=\frac{mg}{K}-\frac{mg}{K}e^{-\frac{K}{m}t}=\frac{mg}{K}\left(1-e^{-\frac{K}{m}t}\right)$$

・(4)のチェックでは，$|x|\ll 1 \rightarrow e^x\simeq 1+x$を用いた．

・(5)のチェックでは $x\rightarrow\infty$のとき$e^x\rightarrow\infty$また$\frac{1}{e^x}=e^{-x}\rightarrow 0$を用いた．

【特解(6)を求めるには】

一般解

$$\left(v-\frac{mg}{K}\right)=-\mathrm{e}^{c}e^{-\frac{K}{m}t}$$

に$t=0$，$v(0)=-|v_0|<0$を代入し，符号を反転して

$$\frac{mg}{K}+|v_0|=e^{c}$$

よって

$$v(t)=\frac{mg}{K}-\left(\frac{mg}{K}+|v_0|\right)e^{-\frac{K}{m}t}$$

となる．最上点では速度が 0 だから$v(t_0)=0$．上の特解に代入して

$$\frac{mg}{K}=\left(\frac{mg}{K}+|v_0|\right)e^{-\frac{K}{m}t_0}\to 1+\frac{|v_0|}{mg/K}=\mathrm{e}^{\frac{K}{m}t_0}$$

あるいは

$$t_0=\frac{m}{K}\log\left(1+\frac{|v_0|}{mg/K}\right)$$

となる．$t=t_0+\tau$とおいて

$$v(\tau)=\frac{mg}{K}-\left(\frac{mg}{K}+|v_0|\right)e^{-\frac{K}{m}(\tau+t_0)}=\frac{mg}{K}-\left(\frac{mg}{K}+|v_0|\right)e^{-\frac{K}{m}t_0}e^{-\frac{K}{m}\tau}$$

$$=\frac{mg}{K}-\frac{mg}{K}e^{-\frac{K}{m}\tau}$$

【(7)の一般解】

$v(t)>0$　（$v(0)=0$から落下を始める場合）

$$\frac{dv}{dt}=g-\frac{K}{m}v^2=-\frac{K}{m}\left(v^2-\frac{mg}{K}\right)$$：最高階数の係数を 1 にする

$$\frac{dv}{v^2-\frac{mg}{K}}=-\frac{K}{m}dt$$ ：変数分離

$$\frac{1}{v^2-\frac{mg}{K}}=\left(\frac{1}{v-\sqrt{\frac{mg}{K}}}+\frac{-1}{v+\sqrt{\frac{mg}{K}}}\right)\times\frac{1}{2\sqrt{\frac{mg}{K}}}$$ ：部分分数展開

$$\frac{dv}{v-\sqrt{\frac{mg}{K}}}-\frac{dv}{v+\sqrt{\frac{mg}{K}}}=-2\sqrt{\frac{mg}{K}}\frac{K}{m}dt=-2\sqrt{\frac{gK}{m}}\,dt$$：整理

$$\int\frac{dv}{v-\sqrt{\frac{mg}{K}}}-\int\frac{dv}{v+\sqrt{\frac{mg}{K}}}=-2\sqrt{\frac{gK}{m}}\int dt$$ ：積分の形

$$\log\left|v-\sqrt{\frac{mg}{K}}\right|-\log\left|v+\sqrt{\frac{mg}{K}}\right|=-2\sqrt{\frac{gK}{m}}t+\mathrm{c}$$：積分の実行

$$\log\left|\frac{v-\sqrt{\frac{mg}{K}}}{v+\sqrt{\frac{mg}{K}}}\right|=-2\sqrt{\frac{gK}{m}}t+\mathrm{c}\qquad\to\qquad\left|\frac{v-\sqrt{\frac{mg}{K}}}{v+\sqrt{\frac{mg}{K}}}\right|=C\,e^{-2\sqrt{\frac{gK}{m}}t}$$ ：整理

$$v(0)=0:\quad\left|\frac{0-\sqrt{\frac{mg}{K}}}{0+\sqrt{\frac{mg}{K}}}\right|=1=\mathrm{C}\times 1:$$ 初期条件から積分定数を決める → $\mathrm{C}=1$

$$\left|\frac{v-\sqrt{\frac{mg}{K}}}{v+\sqrt{\frac{mg}{K}}}\right|=e^{-2\sqrt{\frac{gK}{m}}t}$$ ：特解

$$-\left(v-\sqrt{\frac{mg}{K}}\right)=-v+\sqrt{\frac{mg}{K}}=\left(v+\sqrt{\frac{mg}{K}}\right)e^{-2\sqrt{\frac{gK}{m}}t}$$ ：絶対値記号を外す

$$\sqrt{\frac{mg}{K}}\left(1-e^{-2\sqrt{\frac{gK}{m}}t}\right)=v(t)\left(e^{-2\sqrt{\frac{gK}{m}}t}+1\right)$$ ：整理

$$v(t)=\sqrt{\frac{mg}{K}}\times\frac{1-e^{-2\sqrt{\frac{gK}{m}}t}}{1+e^{-2\sqrt{\frac{gK}{m}}t}}$$ ：特解

極端な条件のチェック

$$\simeq\begin{cases}\sqrt{\frac{mg}{K}}\times\frac{2\sqrt{\frac{gK}{m}}t}{2}=gt\cdots\sqrt{\frac{gK}{m}}t\ll 1 \quad (i.e.\quad v\ll\sqrt{\frac{gK}{m}}t) \\ \sqrt{\frac{mg}{K}} \qquad\qquad \cdots t\to\infty\end{cases}$$

（参考）投げあげたとき$v(0)=-|v_0|$

運動方程式

$$m\frac{dv}{dt}=mg+Kv^2\,,\quad v(0)=-|v_0|$$

概要

初期加速度：$g+\frac{K}{m}v_0^2$

$v(t):-|v_0|\to 0$　単調減少

一番上で $v(t)=0$

4. 運動方程式を解く

$$\frac{dv}{dt}=\frac{K}{m}\left(v^2+\frac{gm}{K}\right)\quad\to\quad\frac{dv}{v^2+\left(\sqrt{\frac{gm}{K}}\right)^2}=\frac{K}{m}dt$$

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{gm}{K}}}\arctan\frac{v}{\sqrt{\frac{gm}{K}}}=\frac{K}{m}t+c'\ \to\ \arctan\frac{v}{\sqrt{\frac{gm}{K}}}=\sqrt{\frac{gm}{K}}\frac{K}{m}t+c\to$$

$$v(t)=\sqrt{\frac{gm}{K}}\tan\left(\sqrt{\frac{gK}{m}}t+c\right),\quad c=-\arctan\frac{|v_0|}{\sqrt{\frac{gm}{K}}}$$

$$v(t_0)=0\ \to\ \sqrt{\frac{gK}{m}}t_0+c=0\ \to\ t_0=\frac{1}{\sqrt{\frac{gK}{m}}}\arctan\frac{|v_0|}{\sqrt{\frac{gm}{K}}}$$

【微分方程式の常識】

● 用語

斉次 定係数 1階 線形 常微分方程式：$\frac{df}{dt}+a\,f(t)=0$

線形：f_1,f_2が解のとき$\alpha f_1+\beta f_2$も解

非斉次 ：$\frac{df}{dt}+a\,f(t)=h(t)$

●斉次解とは，$\frac{df}{dt}=-af(t)$ を満たす$f(t)$のこと

$f(t)=e^{-at}$ が解であることは代入すれば分かる，$f(0)=1$　特解

$f(t)=Ae^{-at}$ も解である．一般解．初期条件により特解を得る：$f(0)=A$

● 斉次解から非斉次解を求める手法　**＜＜定数変化法＞＞**

$f(t)=A(t)e^{-at}$とおき非斉次方程式の解となるための$A(t)$の条件を探る．

$\frac{df}{dt}+af=\frac{dA}{dt}e^{-at}+(-a)Ae^{-at}+aAe^{-at}=\frac{dA}{dt}e^{-at}=h(t)\rightarrow\frac{dA}{dt}=h(t)e^{at}$

$A(t)=\int_0^{t}\frac{dA(t\prime)}{dt\prime}dt'=\int_0^{t}h(t')e^{+at'}dt'$（初期条件により A(0)が定まる）

$$一般解は A(t)=\int^{t}h(t)e^{+at}dt$$

$$f(t)=\int^{t}h(t')e^{+at'}dt'\times e^{-at}$$

● 例　速度に比例する抵抗のもとでの自由落下（上で解いた）

$f(t)\rightarrow v(t),\quad a=\frac{K}{m},\quad h(t)=g,\quad A(t)=\int^{t}g\,e^{\frac{K}{m}t'}dt'=\frac{mg}{K}\mathrm{e}^{\frac{K}{m}t}-A(0)$

$$v(t)=\left(\frac{mg}{K}\mathrm{e}^{\frac{K}{m}t}-A(0)\right)e^{-\frac{K}{m}t}=\frac{mg}{K}-A(0)e^{-\frac{K}{m}t},\qquad A(0)=\frac{mg}{K}.\ (v(0)=0)$$

● 2階定係数線形定微分方程式

$$\frac{d^2f}{dt^2}+a\frac{df}{dt}+b\,f=h(t)$$

● 微分方程式の一般解の自由度（特解を決める初期条件の数）

1階微分方程式では$f(0)$を与えると特解が決まり，2階微分方程式は，$f(0)$と$f'(0)$を与えると特解が定まることを知りたい．

解を$f(t)=c_0+c_1t+c_2t^2+\cdots$と表す．

斉次2階線形定係数の場合

$$f'=c_1+2\,c_2t+3\,c_3t^2+4c_4t^3+$$

$$f''=2c_2+3\times2\,c_3t+4\times3\,c_4t^2+$$

各次数の係数が0（でないと ＝0 が成り立たない）

$$t^0:\quad 2c_2+a\,c_1+b\,c_0=0$$

$$t^1:\quad 3\cdot2\,c_3+2a\,c_2+b\,c_1=0$$

$$t^2: 4\cdot3\,\mathrm{c}_4+3a\,c_3+b\,\mathrm{c}_2=0$$

c_0とc_1を決めると，これら漸化式により全ての係数が決まり，fが決まる

$$\mathrm{c}_0=f(0),\quad c_1=f'(0)$$

2階微分方程式は，$f(0)$と$f'(0)$を与えると特解が定まる．

● 例：$\frac{d^2x}{dt^2}=F\left(x,\frac{dx}{dt},t\right)$の特解は$x(0)$と$v(0)=\frac{dx}{dt}(0)$により決まる．力が位置，速度，時間の関数として決まっているとき，初期位置と初速度さえ決まれば，その後の運動が完全に決まる．