２章

1. 点Ｐの位置が２次元極座標で$\left(5, \dfrac{2\pi}{3}\right)$で表されるとき、この点の直交座標$(x, y)$を求めよ。

極座標の値r, φから､原点を共有し基準線を x 軸とする直交座標の値を求めるには､式(2.4)すなわち

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi$$

を用いて

$$x = 5\cos\frac{2\pi}{3} = 5\times\left(\frac{-1}{2}\right) = -\frac{5}{2} \quad 、\quad y = 5\sin\frac{2\pi}{3} = 5\frac{\sqrt{3}}{2}$$

2. 真空中で，電子銃から出た電子が 30 cm 離れた蛍光板に 4.0 ns (ns はナノ秒とよむ．1 ns=10^{-9} s)で到達した。電子の速度は何 m/s か。これは光の速さ(c = 3.0×10^8 m/s)の何倍か。電子の速度は一定とする。（昔のテレビの原理―ブラウン管）

【初版】テレビのブラウン管中で、電子銃から出た電子が 30 cm 離れた蛍光板に 4.0 ns で到達した。電子の速度は何 m/s か。これは光の速さ(c = 3.0×10^8 m/s)の何倍か。電子の速度は一定とする。

電子が移動した距離は 30 cm と書かれていて有効数字が何桁か明確ではない。しかし、移動に要した時間が 4.0 ns = 4.0×10^{-9}s、光の速さが 3.0×10^8 m/s のように、他はすべて有効数字 2 桁で与えられているので、移動距離も 2 桁の精度であると考える。その単位を MKS にそろえると 30 cm = 3.0×10^{-1}m となる。電子の速度 v は

$$v = \frac{\text{直線移動距離}}{\text{所要時間}} = \frac{30\,\text{cm}}{4.0\,\text{ns}} = \frac{3.0\times10^{-1}\,\text{m}}{4.0\times10^{-9}\,\text{s}} = 0.75\times10^{8}\,\text{m/s}$$

と計算される。$0.75\times10^8 = 7.5\times10^7$ と書いてもよい（有効数字が 2 桁であることを明示する）。ここでは、光の速さと比較する計算に便利なように 10^8 を選んだ。

$$\frac{v}{c} = \frac{0.75\times10^{8}\,\text{m/s}}{3.0\times10^{8}\,\text{m/s}} = 0.25$$

3. 直線道路を速度 10 m/s で走っていた自動車が、速度を一定の割合で速め、5.0 s 後に 25 m/s になった。この間の加速度はいくらか。また、この間の走行距離はいくらか。

初速度v_0, 一定加速度aで運動するとき，式(2.28, 旧 32)

$$v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(t')\,dt' = v(t_0) + \int_{t_0}^{t} \frac{dv(t')}{dt'}\,dt'$$

２章

において，最初の時刻を$t_0 = 0$とおき，中辺に　$a(t') = a =$ 一定，$v(t_0) = v_0$を代入すると

$$v(t) = v_0 + \int_0^t a\,dt' = v_0 + a\int_0^t dt' = v_0 + a \times (t - 0) = v_0 + at$$

また式(2.19，旧 16)

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t v(t')dt' = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \frac{dx(t')}{dt'}dt'$$

において，最初の時刻を$t_0 = 0$とおき，中辺に$v(t') = v_0 + at'$，および最初の位置$x(t_0) = x_0$を代入すると

$$x(t) = x_0 + \int_0^t (v_0 + at')dt' = x_0 + v_0 \times (t - 0) + \frac{1}{2}a(t^2 - 0^2) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

より，時間tでの走行距離$d$$(= x(t) - x_0)$は$d = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$である．題意より，この自動車は速度を一定の割合で速めるので加速度は一定となり（瞬間の）加速度と平均の加速度が同じ値になる．そこで（瞬間の）加速度を求めるため平均の加速度を計算する：

$$a = \frac{25 - 10}{5.0} = 3.0\ \mathrm{m/s^2},$$

この間の走行距離dは$v_0 = 10\ \mathrm{m/s}$，$t = 5.0\ \mathrm{s}$，$a = 3.0\ \mathrm{m/s^2}$をdの式に代入すると：

$$d = 10 \times 5.0 + \frac{1}{2} \times 3.0 \times (5.0)^2 = 88\ \mathrm{m}$$

注意：これらの計算は有効数字２桁で行った．これが可能だったのは，平均加速度の計算$a = \frac{25-10}{5.0}$の分子が，引き算にもかかわらず幸運にも２桁の精度を保って 15 となったからである．

【初版の解説】

加速度の定義は式(2.18)の「速度の時間微分」すなわち

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

であるが、この問のように速度が時間に比例して変化するときは⊿t→0 の極限をとる前と後で同じ値であり、式(2.17)すなわち

$$\overline{a} = \frac{v(t_\mathrm{B}) - v(t_\mathrm{A})}{t_\mathrm{B} - t_\mathrm{A}}$$

を用いて計算しても同じになる。

速度の変化分は 25 m/s－10 m/s = 15 m/s となり、引き算をした結果としても有効数字が 2 桁を保っている（もし 25 m/s － 24 m/s = 1 m/s のようなときには、引き算の結果として有効数字が 1 桁になってしまう：桁落ちという）。この値を有効数字 2 桁の経過時間でわるから、加速度の値も有効数字 2 桁

$$a=\frac{25\,\mathrm{m/s}-10\,\mathrm{m/s}}{5.0\ \mathrm{s}}=\frac{15\,\mathrm{m/s}}{5.0\,\mathrm{s}}=3.0\,\mathrm{m/s^2}$$

である。

　速度が時間に比例して一定の割合で増加することを、時間の関数として表すと、

$$v(t)=at+v_0$$

である。ただし $v(0)=v_0=10\,\mathrm{m/s}$ とした。 t =0 から 5 s までに進んだ距離は、式(2. 15)すなわち

$$x(5.0\mathrm{s})-x(0)=\int_0^{5.0\mathrm{s}}v(t)dt=\int_0^{5.0\mathrm{s}}(at+v_0)dt=\int_0^{5.0\mathrm{s}}(at)dt+\int_0^{5.0\mathrm{s}}(v_0)dt=a\int_0^{5.0\mathrm{s}}t\,dt+v_0\int_0^{5.0\mathrm{s}}dt$$

$$=a\times\frac{1}{2}\left[t^2\right]_0^{5.0\mathrm{s}}+v_0\times\left[t\right]_0^{5.0\mathrm{s}}=\left(3.0\mathrm{m/s^2}\right)\times\frac{(5.0\mathrm{s})^2}{2}+(10\mathrm{m/s})\times(5.0\mathrm{s})=37.5\mathrm{m}+50\mathrm{m}$$

$$=87.5\,\mathrm{m}=88\,\mathrm{m}$$

（最終結果の表示には有効数字２桁を守った。分母に出てくる２は測定値ではなく「どこまでも正確な２という値」。）

　速度が一定の割合で増加するという極めて単純な場合だから、積分を用いないで簡単に計算することもできる。走行距離は tv 図に描かれた速度のｸﾞﾗﾌの下側の図形の面積（関数の定積分はそのｸﾞﾗﾌの下側の面積、この場合は台形：短い辺が 10 m/s、長い辺が 25 m/s、幅が 5.0 s）で表されるから、

$$\frac{10\,\mathrm{m/s}+25\,\mathrm{m/s}}{2}\times5.0\ \mathrm{s}=\frac{35\mathrm{m/s}}{2}\times5.0\,\mathrm{s}=87.5\mathrm{m}=88\mathrm{m}$$

4.　**ある質点の運動がつぎに式で与えられるとき、この質点の時刻 t での速度と加速度を求めよ。A、 ω、φ、αは定数である。**

(1)　$x=At^3$,　　(2)　$x=A\sin(\omega t+\phi)$,　　(2)　$x=Ae^{\alpha t}$

(1)　$x=At^3$　直線上を運動する質点の座標が時間の３乗に比例して変化する。速度は座標の時間微分

$$v=\frac{d}{dt}x=\frac{d}{dt}\left(At^3\right)=A\frac{dt^3}{dt}=A\times3t^2=3At^2$$

であり、時間の２乗に比例して変化する。加速度は速度を時間微分して

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}\left(3At^2\right)=3A\times\frac{dt^2}{dt}=3A\times2t=6At$$

であり、時間に比例して変化する。

(2)　$x=A\sin(\omega t+\phi)$　直線上を運動する質点の座標が時間的に単振動する。その性質は

・単振動の中心は座標原点

・振幅（振動の中心位置から変位が最大となる位置まで）はＡ、（単位:m）
・角振動数はω、（単位:rad/s）
・時間がＴ＝２π/ω（周期）だけ経過すると質点の位置がもとに戻る。
・　位相（サイン関数の引数）はωt+Φ。単振動は一定の速さで回る円運動角を横から見たのと同じもの。対応する円運動の回転角が位相。時刻ｔ＝０における位相（初期位相）がΦ。時間原点で原点にいるならΦ=0である。

座標を時間微分する：

サイン関数の微分係数（復習なので、サインの微分がコサインとなることを知っているなら、◆のところまでジャンプする）。

まず、微分係数の定義と三角関数の加法定理から

$$\frac{d\sin z}{dz}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\sin(z+\Delta z)-\sin z}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\sin z\ \cos\Delta z+\cos z\ \sin\Delta z-\sin z}{\lim_{\Delta z\to 0}\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\left[\sin z\left(\frac{\cos\Delta z-1}{\Delta z}\right)+\cos z\left(\frac{\sin\Delta z}{\Delta z}\right)\right]$$

と変形すると、最左辺に現れる極限値を求めることが必須となる。

第一項については、倍角の公式を使うと

$$\cos\Delta z=\cos\left(2\times\frac{\Delta z}{2}\right)=1-2\sin^2\left(\frac{\Delta z}{2}\right)$$

となるので

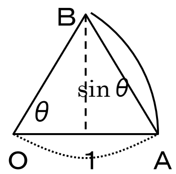
$$\cos\Delta z-1=-2\sin^2\left(\frac{\Delta z}{2}\right)$$

したがって

$$\left(\frac{\cos\Delta z-1}{\Delta z}\right)=\frac{-2\sin^2\left(\frac{\Delta z}{2}\right)}{\Delta z}=-(\sin\Delta z)\left[\frac{\sin\left(\frac{\Delta z}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta z}{2}\right)}\right]$$

第二項と比較すると、$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}$ という極限が共通して現れていることがわかる（第一項は$\theta=\frac{\Delta z}{2}$、第二項は$\theta=\Delta z$とおいたもの）ので、$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}$を先に調べる。図のようにＯを中心とする半径１の円の一部である「頂角θ（ラジアン）の扇形ＯＡＢ」に注目すると、扇形の面積は円の面積の$\frac{\theta}{2\pi}$倍となり

扇形ＯＡＢの面積＝$\frac{\theta}{2\pi}\times\pi=\frac{\theta}{2}$



また、三角形ＯＡＢの面積は底辺が１、高さが$\sin\theta$となるので

$$\text{三角形ＯＡＢの面積} = \frac{1\times\sin\theta}{2} = \frac{\sin\theta}{2}$$

である。角θが 0 に近づくと、これらの面積は同じ値に近づくから（0/0 になるという意味ではない）

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

となる。

サインの値は頂角とともに 0 に近づくので　$\lim_{\theta\to 0}\sin\theta = 0$　だから、第一項については

$$\lim_{\Delta z\to 0}\left[\sin z\left(\frac{\cos\Delta z - 1}{\Delta z}\right)\right] = \lim_{\Delta z\to 0}\left[\sin z\times(-\sin\Delta x)\times\frac{\sin\left(\frac{\Delta z}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta z}{2}\right)}\right] = \sin z\times(-1\times 0)\times 1 = 0$$

第二項については

$$\lim_{\Delta z\to 0}\left[\cos z\left(\frac{\sin\Delta z}{\Delta z}\right)\right] = \cos z\times 1 = \cos z$$

となり、これらを総合して

$$\frac{d}{dz}\sin z = \cos z$$

さらにｚがｔの関数ｚ(ｔ)のとき合成関数の微分法から

$$\frac{d}{dt}\sin z(t) = \frac{dz}{dt}\frac{d}{dz}\sin z = \frac{dz}{dt}\cos z$$

となる。本問では$z = \omega t + \phi$だから

$$\frac{d}{dt}z = \frac{d}{dt}(\omega t + \phi) = \omega$$

であり、

◆ $$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(A\sin(\omega t + \phi)\right) = A\frac{d}{dt}\sin(\omega t + \phi) = A\omega\cos(\omega t + \phi)$$

単振動する質点は、速度の変化も単振動である。位置座標の振幅Ａと角振動数ωの両方に比例して速度が大きくなる。質点の位置が振動の中心にある（サインの値が 0）とき、速度の大きさは（コサインに比例するので）最大となる。位置が中心から最も離れるとき（サインの値が１）質点の進行方向が反転する、すなわち速度の符号が変わるときなので、速度は 0 である。

２章

加速度は速度を微分して得る。コサイン関数のグラフはサイン関数のグラフを $\pi/2$ だけ横にずらした形なので、その微分は上で求めたサイン関数の微分を応用できる：

$$\frac{d}{dt}\cos(\omega t+\phi)=\frac{d}{dt}\sin\left(\omega t+\phi+\frac{\pi}{2}\right)=\omega\cos\left(\omega t+\phi+\frac{\pi}{2}\right)=-\omega\sin(\omega t+\phi)$$

よって

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}\left(A\omega\cos(\omega t+\phi)\right)=A\omega\frac{d}{dt}\cos(\omega t+\phi)=-\omega^2 A\sin(\omega t+\phi)$$

単振動する質点の加速度は、位置の変化にあわせて単振動する。ただし位置が正（負）の値のとき加速度は負（正）となり、力（加速度に質量を掛けたもの）は常に質点を原点の方に引き戻そうとする。加速度の大きさは、位置の単振動の振幅と角振動数の二乗の両方に比例する。

(3)　$x=Ae^{\alpha t}$　「e」は自然対数の底と呼ばれ無理数、その概略の値は 2.7。指数関数 e^z は「微分すると同じ形になる関数」である。すなわち

$$\frac{d}{dz}e^z=e^z$$

その理由は次のとおり（これは数学の復習なので、分っている場合には●のところまで飛ぶ）：

指数関数はいくつかの異なる定義の仕方がある。最も実用的なものは

$$\begin{aligned}e^z &=1+z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{2\times 3}+\cdots=\\ &=\frac{z^0}{1}+\frac{z^1}{1}+\frac{z^2}{1\times 2}+\frac{z^3}{1\times 2\times 3}+\cdots\\ &=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}\end{aligned}$$

のように無限に続く多項式（べき級数という）による定義。この定義によれば「指数関数を微分したものは、もとの指数関数と同じ」ことがわかる。すなわち

$$\frac{d}{dz}e^z=e^z$$

である。z(t) とすると合成関数の微分法により

$$\frac{d}{dt}e^z=\frac{dz}{dt}\times\frac{d}{dz}e^z=\frac{dz}{dt}\times e^z$$

となる。よって

●　$$v=\frac{dx}{dt}=\frac{d}{dt}\left(Ae^{\alpha t}\right)=A\frac{d}{dt}e^{\alpha t}=\alpha Ae^{\alpha t}$$

速度は位置と比例した大きさになる。$\alpha>0$ ならば、時間が $t=0$ から $t=1/\alpha$ だけ経過

すると、速度（位置も）t ＝ 0 のときの値の e 倍になる。α＞ 0 なら 1/e になる：指数関数に従って減少する量について、t ＝ 0 の値の 1/e になる時間（= 1/ α）を「時定数」と呼ぶ。

加速は

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\alpha A e^{\alpha t}\right) = \alpha^2 A e^{\alpha t}$$

となる。加速度も位置に比例した大きさとなる。

5.　高さ 4.9 m のところから、ボールを 9.8 m/s で鉛直上向きに投げ上げた。投げてからの時間を t として、ボールの速度 v と高さ x を t の関数として表せ。最高点の高さ、地面に衝突するまでの時間、地面に衝突するときの速度はいくらか。

【初版】　・・・時間を t[s]として・・・

地面上に原点をとり、鉛直上向きにx軸をとる。

tを s で測った数値とする．その意味は次の通りである．文字で表す量，たとえば位置xに代入するものは1.0 m，速度vであれば2.0 m/s，時間tであれば3.0 sのように，数値と単位（基準の量）の積となるのが普通である．しかし，数値的な計算のメモを書くとき，単位の記載がわずらわしいと思うことが多い．そのため，途中の計算式で単位を省略する場合もよくある．だが，計算式に数値と文字が混在するときは，「単位略した数値」と「単位を含む文字」の和などが出てきて不統一になる．そこで，本来は単位をもつ量を表す文字にも数値を代入して「統一感」をもたせるという便法もある．この問では，時間を表すtに単位を省略した数を代入することにした．

座標が鉛直上向き，したがって加速度は負．運動方程式は例題 2. 6 の式(2. 49)と同様に

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g$$

である．加速度から積分によって速度を求めると式(2. 50)

$$v(t) = v_0 - gt$$

さらに速度から積分によって位置を求めると式(2. 51)

$$x(t) = h + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

となる．題意より，$g = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$，$v_0 = 9.8\ \mathrm{m/s}$，$h = 4.9\ \mathrm{m}$(の数値)を用いると

$$v = (9.8\ - 9.8\,t)\ \mathrm{m/s}, \qquad x = \left(4.9 + 9.8\,t - 4.9\,t^2\right)\mathrm{m}$$

だが，この書き方と

$$v(t) = v_0 - gt, \quad x(t) = h + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2, \quad \text{ただし}\ v_0 = 9.8\ \mathrm{m/s}, \quad g = 9.8\ \mathrm{m/s^2},\ h = 4.9\ \mathrm{m}$$

という書き方に優劣はない（ここでtは単位を含む）．私は後者を推奨したい．

２章

最高点の位置 : 位置が時間の関数となっているので、まず最高点に到達する時刻を先に求める。最高点の前後で速度が上向き（正）から下向き（負）に変わるので最高点に達したとき$v\ =\ 0$より$t\ =\ 1.0$,　したがって$x = 9.8$ m.

地面に衝突するときの速度 : 速度も時間の関数となっているので、衝突時刻を先に求める。衝突するとき質点の位置は地上すなわち$x = 0$であるから

$$4.9+9.8\,t\ -4.9\,t^{\ 2} = -4.9(t^{\ 2}-2t\ -1) = 0$$

を解き$t\ >0$の解を求めると

$$t = 1.0 + \sqrt{2.0} = 2.4.$$

よって$v =\ (9.8-9.8t) = 9.8\,(1-t) =\ -9.8\sqrt{2.0} = -14$ m/s

【初版の解説】

地面上に原点をとり、鉛直上向きに x 軸をとる。そうすると、ボール（質点とみなす）の運動方程式は例題 2.6 の式(2.44)と同様に

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g$$

であり、この式から積分により速度を求めると

$$v(t) = v(0) + \int_0^t (-g)dt = v(0) - g\,t \qquad (*)$$

もう一度積分して位置は

$$x(t) = x(0) + v(0)t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad (**)$$

である。時間の原点 $t = 0$ を投げ上げた瞬間とする： $x(0) = 4.9\,\mathrm{m},\ v(0) = 9.8\,\mathrm{m/s}$。ところで、問題文中に「**時間を** t[s]」としているが、その意味は、「ｔは秒単位で測定した時間を表す数値」である（上に書いた式(*), (**)の「t」はこれと異なり数値と単位を含むが、このように物理量を表す文字が「数値と単位の組」であることのほうが普通）。こうして

$$v(t) = 9.8\,\mathrm{m/s} - (9.8\,\mathrm{m/s^2}) \times t\,[\mathrm{s}] = (9.8 - 9.8t)\mathrm{m/s} \qquad (+)$$

また

$$x(t) = 4.9\,\mathrm{m} + 9.8\,\mathrm{m/s} \times t[s] - \frac{1}{2}9.8\,\mathrm{m/s^2} \times (t[s])^2 = (4.9 + 9.8t - 4.9t^2)\mathrm{m} \qquad (++)$$

最高点の位置 : 位置が時間の関数となっているので、まず最高点に到達する時刻を先に求める。最高点の前後で速度が上向き（正）から下向き（負）に変わるので最高点に達したときｖ＝０となる。これを式(+)に適用すると最高点を通過する時刻では

$9.8-9.8t = 0$

が満たされることより

ｔ＝１.０

である。この値を式(++)に代入すると右辺の値が 4.9 + 9.8×1.0 − 4.9×(1.0)²= 9.8 となる。よって $x = 9.8\,\mathrm{m}$。

地面に衝突するときの速度：速度も時間の関数となっているので、衝突時刻を先に求める。衝突するとき質点の位置は地上すなわち $x = 0$ であるから式(++)にこれを適用して

$$\left(4.9 + 9.8t - 4.9t^2\right) = 4.9 \times \left(1 + 2t - t^2\right) = 0$$

二次式 $t^2 - 2t - 1 = 0$ を解くと $t = 1 \pm \sqrt{2}$ を得るが、複合が負の方は t が負であり「投げ上げる以前」の時刻であるから除外して $t = 1 + \sqrt{2} = 2.4$ を得る（二次式の係数の精度は全て有効数字２桁であるから、解の値も有効数字２桁以上の精度はでないので $\sqrt{2} = 1.4$ という近似を行った）。しかし、衝突速度が求めるためにこの結果を式(+)に代入するときは $\sqrt{2}$ を近似的な値で表すのは一番最後にする（これは計算の途中で余計な誤差を発生させないようにするための常套手段）。実際、

$$9.8 - 9.8 \times \left(1 + \sqrt{2}\right) = 9.8 \times \left(1 - 1 - \sqrt{2}\right) = -9.8 \times \sqrt{2}$$

と計算される。したがって $v = -9.8\sqrt{2}\ \mathrm{m}/s = -14\mathrm{m}/s$。教科書は３桁計算してあるが有効数字は２桁だから「少し言い過ぎ」。

6. **ボールを鉛直上方に投げ上げ 2.0 s 後に同じ高さで受けた。投げ上げたときのボールの速さはいくらか。**

ボールを離した（受けた）点を原点とし、鉛直上向きに x 軸をとる。したがって、初期位置は原点すなわち $x(0) = x_0 = 0$, ボールの初速度を $v(0) = v_0$ とすると，問 5 の該当する式にこれらを代入して

$$x(t) = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 = t \times \left(v_0 - \frac{1}{2}gt\right)$$

を得る。$t = 2.0\mathrm{s}$ で原点 $x = 0$ に戻ることより $t \times \left(v_0 - \frac{1}{2}gt\right) = 0$ となるから

$$v_0 = \frac{1}{2} \times 9.8\,\mathrm{m/s^2} \times 2.0\,\mathrm{s} = 9.8\,\mathrm{m/s}$$

7. **ある飛行機は時速 180 km/h 以上でないと離陸できない。この飛行機が滑走路を重力加速度の 1/4 で等加速度運動するとして、必要な滑走路の長さは最低いくらか。**

飛行機ははじめに静止しているはずだから初速度すなわち $t = 0$ における速度が $v(0) = 0$、加速度 a の等加速度運動であるから、時刻 t における速度は

２章

$$v(t)=v(0)+\int_0^t a\,dt=0+at=at \qquad (@)$$

また時刻 t における位置は、初期位置すなわち $x(0)$ を原点にとると $x(0)=0$ だから

$$x(t)=x(0)+\int_0^t v(t)dt=0+\int_0^t atdt=\frac{a}{2}t^2 \qquad (@@)$$

となる。

飛行機の加速度は $a=\dfrac{9.8}{4}\,\mathrm{m/s^2}$。

離陸時刻を t とすると離陸に必要な速度は $v(t)=v=\dfrac{1.80\times10^5}{60\times60}\,\mathrm{m/s}$。すべての計算を同一の単位系で行うため、速度は MKS 単位系で表す。また、問題で与えられた数値「180」が有効数字３桁のようにも見えるのでこの段階では３桁で書いておく。時間を秒に変換するときの１時間＝60 分、１分=60 秒は単位変換の約束の数値なので、どこまでも正確な値として扱う。

式(@)の左辺を $v=at$ と書き直すとこれを得るのに必要な時間は $t=\dfrac{v}{a}$。この間に滑走する距離は式(@@)に t の値を代入して、

$$d=x(t)-x(0)=x(t)-0=x(t)=\frac{1}{2}at^2=\frac{v^2}{2a}=\frac{\left(\dfrac{1.80\times10^5}{60\times60}\right)^2}{2\times\dfrac{9.8}{4}}=\frac{\left(\dfrac{1}{2.00}\times10^2\right)^2}{4.9}$$

$$=\frac{10^4}{4.00\times4.9}=5.1\times10^2\,\mathrm{m}$$

途中の数値計算では単位を省略した。

8. 自動車が半径 r の円軌道を描く道路を一定の速さ v で走っている。 円の中心を原点とし、自動車は時刻 $t=0$ に $(x,y)=(0,r)$ のところにおり，x軸に平行に正の方向に走っていた。自動車の位置座標 (x,y)，速度と加速度のx,y成分 を時間 t の関数として表せ。

【初版】自動車が半径 r の円軌道を描く道路を一定の速さ v で走っている。 円の中心を原点とし、自動車は時刻 $t=0$ に x 軸の正のところにおり、x 軸の正の方向に走っていた。自動車の位置座標 (x,y) を時間 t の関数として表せ。また速度と加速度の x,y 成分を求めよ。

自動車は平面上の円運動を行うので，円の中心を原点とする２次元極座標で考えると動径

$= r =$ 一定となり，運動を記述に必要な「時間的に変化するパラメータ」は偏角だけとなる．もしxy座標を用いて記述すると，パラメータが x と y の二つになってしまう．

題意から偏角φについての情報は$t = 0$で自動車は$(0, r)$にいることから，初期値として$\varphi = \frac{\pi}{2}$．おなじく $t = 0$ で x **軸の正の方向に走っていたということから，自動車は時計回りに運動している．一方，偏角は反時計回りに測った値を正とするので，**自動車はφが小さくなる方向に走っている．

微小な時間dtの間の回転角を$d\varphi$とすると角速度は$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$と定義される．本問では，$dt > 0$の間に自動車が時計回りに回転するので$d\varphi < 0$，したがって$\omega < 0$である．

dtの間に円周上を進む距離$d\ell$は，ラジアンの定義から，$d\ell = r|d\varphi|$であり，自動車の速さは$v = \frac{d\ell}{dt} = r\left|\frac{d\varphi}{dt}\right|$である．すなわち$v = r|\omega|$という関係がある．$\omega < 0$だから，角速度は$\omega r = -v$と書ける．すなわち$\omega = -\frac{v}{r} =$ 一定．偏角φを時間の関数として表すと，$t = 0$で$\varphi = \frac{\pi}{2}$をとり，その時間的な変化の割合いが$\omega =$ 一定．したがって$\varphi = \frac{\pi}{2} + \omega t = \frac{\pi}{2} - \frac{vt}{r}$.

自動車の(x, y)座標と 2 次元極座標(r, φ)の関係は，原点が共通で x 軸と始線が共通だから$x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$ である．したがって$x = r\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{vt}{r}\right)$，$y = r\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{vt}{r}\right)$. 速度の各成分は位置座標の各成分の時間微分であり$v_x = v\cos\left(\frac{vt}{r}\right)$，$v_y = -v\sin\left(\frac{vt}{r}\right)$，加速度の各成分は速度の各成分の時間微分であり$a_x = -\frac{v^2}{r}\sin\left(\frac{vt}{r}\right)$，$a_y = -\frac{v^2}{r}\cos\left(\frac{vt}{r}\right)$

【初版の解説】

この自動車の運動は極座標を用いて表現するのが自然である。すなわち「円運動」を「動径が時間的に変化しない」、また「円軌道を一定の速さで」を「偏角が時間に正比例して増加する」と言い換えると、極座標の変数を用いて運動の特徴が自然に表されていることが明瞭になる。

そこで、自動車の位置を２次元極座標で表すと、動径$= r$。さらに、一定の速さで回転するので、時間の経過Δtと偏角の増加$\Delta\varphi$が比例し

$$\Delta\varphi = \omega \times \Delta t$$

と書ける。ωは回転の角速度と呼ばれ

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \qquad （\Delta t \text{ を無限に小さくした極限では } \omega = \frac{d\varphi}{dt}） \qquad （*）$$

である。このことを指して「単位時間に偏角φがωだけ増加した」という言い方をする習慣的がある。その理由は、これらの式でΔtを単位時間 ＝1 秒にとると、偏角φの増加分とωの数値が等しくなるからである（ωの単位は rad/s、$\Delta\varphi$の単位は rad だから単位は異

なるが、数値は同じになる）。

次に、問題に与えられた自動車の速さから回転の角速度を求める作業をする。速さは「ある時間内に進む距離をその時間で割ったもの」だから、この自動車が

Δt 内に円弧にそって移動する距離＝円弧の長さ＝$\Delta\varphi \times r$

を時間 Δt でわり

$$v = (\Delta\varphi \times r)/\Delta t = (\Delta\varphi/\Delta t) \times r = \omega \times r$$

となる。このことを指して「単位時間の円弧にそった移動距離＝ｖ」という言い方をする習慣がある（同じ単位系で測定した移動距離の数値と速度の数値が等しい）。

題意より自動車の速さｖと半径の値ｒは一定なので

$$\omega = \frac{v}{r} = \text{一定}$$

となる。

極座標を用いた自動車の運動の表現は、自動車の位置を表す変数、動径 r と偏角 φ を時間の関数として表すことである。まず動径は、原点を中心とする円周上だから

$r(t)$ ＝ 一定（時間的に変化しない）

つぎに偏角は、時間に正比例して増加するので、$t = 0$ における偏角を φ_0 とすると

$\varphi(t) = \omega t + \varphi_0$ （両辺を時間で微分すると式（＊）となる）

題意から、$t = 0$ で x 軸上（これを極座標の基準線とする）にいるから

$$\varphi(0) = \varphi_0 = 0$$

よって

$$\varphi(t) = \omega t = \frac{vt}{r}$$

極座標と直交座標が原点を共有し、基準線が x 軸となっているので、位置を表す直交座標の値は

$$x(t) = r\cos\varphi = r\cos(\omega t) = r\cos\frac{vt}{r}$$

$$y(t) = r\sin\varphi = r\sin(\omega t) = r\sin\frac{vt}{r}$$

これらを時間で微分すると速度の成分が求まり、もう一度微分すると加速度の成分が求まる。計算を実行すると、速度は

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(r\cos\left(\frac{v}{r}t\right)\right) = r\frac{d}{dt}\cos\left(\frac{v}{r}t\right) = r \times \frac{v}{r} \times \left(-\sin\left(\frac{v}{r}t\right)\right) = -v\sin\left(\frac{v}{r}t\right)$$

$$v_y(t) = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left(r\sin\left(\frac{v}{r}t\right)\right) = r\frac{d}{dt}\sin\left(\frac{v}{r}t\right) = r \times \frac{v}{r} \times \left(\cos\left(\frac{v}{r}t\right)\right) = v\cos\left(\frac{v}{r}t\right)$$

加速度は

２章

$$a_x(t)=\frac{dv_x}{dt}=\frac{d}{dt}\left(-v\sin\left(\frac{v}{r}t\right)\right)=-v\times\frac{d}{dt}\sin\left(\frac{v}{r}t\right)=-v\times\frac{v}{r}\times\left(\cos\left(\frac{v}{r}t\right)\right)=-\frac{v^2}{r}\cos\left(\frac{v}{r}t\right)$$
$$a_y(t)=\frac{dv_y}{dt}=\frac{d}{dt}\left(v\cos\left(\frac{v}{r}t\right)\right)=v\times\frac{d}{dt}\cos\left(\frac{v}{r}t\right)=v\times\frac{v}{r}\times\left(-\sin\left(\frac{v}{r}t\right)\right)\quad=-\frac{v^2}{r}\sin\left(\frac{v}{r}t\right)$$

9. **流速 1.0 m/s の川を、静水中の速さが 2.0 m/s の船で渡る。流れと直角に（最短距離で）川を横断するには、舳先をどの方向に向ければよいか。このとき流れに垂直な方向の船の速さはいくらか。**

この問には３章で学ぶ「運動の記述の相対性」が含まれるので、分かりにくければ３章が終了してから解くとよい。ここで用いる結論は「陸から見ると、船の速度は、静水中の速度に流れの速度を加えたもの」となることである。最も簡単な場合としては、陸から見て船が静止して見えるためには、船は静水中の速さを 1.0 m/s にして上流に向かって航行する必要がある。

川に垂直に x 軸、上流に向け y 軸をとる。船の舳先の向きが川上に傾き x 軸と角度 θ とすると、流れと平行な速度の成分は（流れの速さ＝負を加えるので）

$v_y=(2.0\sin\theta-1.0)\,\mathrm{m/s}$ である。流れと直角に航行するにはこれが 0 となるから

$$v_y=2.0\sin\theta-1.0=0$$

これより $\sin\theta=\frac{1.0}{2.0}=0.50$ 、よって $\theta=30°$ 。したがって、流れに垂直な速度の成分は

$v_x=2.0\cos\theta=2.0\times\frac{\sqrt{3}}{2}=1.7\,\mathrm{m/s}$。

有効数字２桁とした。より正確には、$\sin\theta=0.50$ の右辺が正確な 1/2 とは言えないので、四捨五入して 0.50 になる範囲すなわち $\sin\theta=0.495$ ～ $\sin\theta=0.504$ に注目し、これを θ の範囲 $\theta=29.7°$ ～ $30.3°$ になおす。そうすると $\theta=30°$ としてよいことがわかる（四捨五入して $\theta=30°$ となるのは $\theta=29.5°$ ～ $30.4°$ で、若干異なるが、あまり気にしないでよい。）