例題 7.1

Q. 摩擦力が仕事をしたということですが、エネルギーの収支としては摩擦による熱エネルギーに変換したということで良いのでしょうか？

A. 「物体の運動エネルギーが熱に変わった，と考えてよいか」という質問であれば，答えは「そのとおり」です．非常に重要なことなので，以下に説明を加えます．

日常的な物体（肉眼で見える物体）の運動に注目するとき，「力による仕事＋運動エネルギーの変化＝一定」が（力が重力であろうと摩擦力であろうと）常に成り立ちます．

摩擦力が物体にした仕事は，速度と力が逆向きなので，負になります．物体の運動エネルギーに負の仕事を加えたので，物体の運動エネルギーが減少します．どの方向に運動しても，摩擦力は運動エネルギーを減らすように働きます．

自由落下や放物運動などで，重力と逆向きの速度（上昇）で運動するときは，重力がする仕事が負となるので物体の運動エネルギーが減少します．一方，重力と同じ向きの速度（下降）で運動するときは，重力がする仕事が正となり物体の運動エネルギーが増加します．

重力による運動では，「運動エネルギーと重力による位置エネルギーの和」が常に一定で，どちらかが増えると，同じ量だけ他方が減ります．これを「エネルギーが保存された」と理解するのです．言い換えると，位置エネルギーという概念を新たに作り出して「保存される量としてのエネルギー」を導入することができたのです．

摩擦力による運動では，（位置エネルギーが存在せず）運動エネルギーが減るだけなので，常に一定となる量がありません．しかし，熱（日常的な物体のエネルギーではない）もエネルギーの一形態であるとすると，運動エネルギーの減少分と発生した熱を加えたものが一定となり（このことは実測により証明されるべきもの），エネルギーの概念を拡張して「エネルギー保存則」を成り立たせます．

「エネルギーが保存されるように，エネルギーの形態を拡張する」ことで，力学的エネルギー，熱エネルギー，電磁気的エネルギー，化学エネルギー，核エネルギーというように，エネルギーの概念が広くなりました．しかし，つい１００年ほど前，原子核物理学の黎明期には「エネルギー保存則を捨てる必要があるかもしれない」という議論が活発に行われたこともありました．

例題 7.2(3)

Q　運動量は見る人によって変わるわけでなく変化量はどの座標系でも一定ということでよいのでしょうか？

A. 違います．

運動量は速度に質量をかけた量．物体の速度は，見る人の速度によって異なる量になるので，運動量も見る人によって異なります．

Q. $\Delta K' = \frac{2}{m}V^2 - \frac{m}{2}(v+V)^2$とは、どこから出てきた式なのでしょうか？

A. この問題では，$\Delta K'$とはO'系(A さんが乗る座標系，大地)から見た運動エネルギーの変化のことです．物体は電車の進行方向に$v_1 = v \to v_2 = 0$と変化し，電車の速度がVなので，O’ 系から見た物体の速度は$v_1' = V + v \to v_2' = V$と変化します．

そうすると，O’ 系から見た運動量の変化は

$$\Delta K' = \frac{1}{2}m{v_2'}^2 - \frac{1}{2}m{v_1'}^2 = \frac{1}{2}mV^2 - \frac{1}{2}m(V+v)^2 = -\frac{1}{2}mv^2 - mvV$$

となります．

この式について重要なことは，運動量の変化が座標系により異なった値になることです．

例題 7.2(4)

Q. $d' = \frac{m}{2F}V^2 + \frac{mvV}{F} = d + \frac{mvV}{F}$の変形では，$\frac{m}{2F}V^2$=$d$としているのでしょうか。

A. はい．

初速度０，等加速度$a = F/m$で運動する物体が，距離d進んだときの速度をVとすると，この間に力がした仕事Fdと

運動エネルギーの増加$mV^2/2$が等しいので$\frac{m}{2F}V^2=d$が成立します.

例題 7.3

Q. 高さ h のところから鉛直投げ上げをしたら地面は$(-h)$の高さとなるような気がしましたが・・・

A. 日常語で安易に考えると，さまざまな量を取り扱うときに（いつのまにか視座を変えたりして）誤ることがります．グラフを描き，座標軸を入れ・・・と，マニュアルどおりに進んでください.

例題 7.4

Q. 本文で言われているバネの力がどう向いているのか，理解しにくいです.

A. 「バネの伸びをxとすると，バネの力は$F=-kx$である」というところでしょうか？
まず，座標の設定：バネが伸びる方向に正のx軸をとり，バネが自然長のときの物体（バネの動くほうの端）を原点にします．そうすると，$x>0(<0)$がバネが伸びた（縮んだ）ことを表します．バネが伸びると縮もうとするので，物体には原点に向かう力が働きます．フックの法則に従うバネは，力の大きさとバネの伸びた大きさxが比例します. また, この力の向きはx軸の負の方向なので, 力が負となります. 正の比例係数kを用いると, $F=-kx$と書けます.

Q. 時間平均を積分で表すところが分かりません.

A. 時間的に変化する量（雨の量）の大小を比較するのに，短い時間内で見られる多い少いをならして，その量の単位時間あたりの平均（1 時間当たりの降水量）を使うことがあります．そのためには，ある時間内の積算量をその時間で割ります（たとえば半日に降った総量を 12 時間で割る）.

ある量が時間の関数として$f(t)$と表されるとき，$\int_0^{\mathrm{T}} f(t)dt$が 0〜$T$の間の総量です(この$T$は周期である必要はありません)．これは定積分の定義：$\int_0^{\mathrm{T}} f(t)dt$は「$f(t)\times dt$（$dt$内の総量）を 0〜T の範囲で寄せ集める．そうすると，この時間内の平均は

$$\frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} f(t)dt$$

となります.

Q. $<\mathrm{K}>=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{1}{2}mv^2dt$、$<\mathrm{V}>=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{1}{2}kx^2dt$　この式がそれぞれ「運動エネルギーを 1 周期で時間平均したもの」と「位置エネルギーを 1 周期で時間平均したもの」と表していることがわかりません

A.　速度が時々刻々変化するときは，運動エネルギーも時間的に変化します：$K(t)=\frac{1}{2}m\big(v(t)\big)^2=\frac{1}{2}mv(t)^2$

この問の場合には，運動が単振動なので,

$$x(t)=a\sin(\omega_0 t+\phi)$$

速度は

$$v(t)=\frac{dx}{dt}=\omega_0\,a\cos(\omega_0 t+\phi)$$

運動エネルギーは

$$K(t)=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\,\{\omega_0\,a\cos(\omega_0 t+\phi)\}^2=\frac{1}{2}ma^2\omega_0^2\cos^2(\omega_0 t+\phi)$$

1 周期 $T=\frac{2\pi}{\omega_0}$ にわたる総量（周期運動のため，定積分の値は幅がTなら，積分区間の端をどこに選んでも，同じ値になる）をTで割り,「運動エネルギーの時間平均」$<\mathrm{K}>$は

$$<K\geq\frac{1}{T}\int_0^T K(t)\,dt=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{1}{2}m\big(v(t)\big)^2\,dt$$

により計算できます.

Q. 式 7.55 の積分計算の詳細を教えてください.

A. 定数を除いて

$$\frac{1}{T}\int_0^T \sin^2(\omega_0 t+\phi)\,dt = \frac{1}{2}$$

の計算となります. ここで $T=\frac{2\pi}{\omega_0}$であることを思い出す必要があります.

まず, 三角関数の関係式

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 1-2\sin^2\theta \ \Rightarrow \sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$$

より

$$\frac{1}{T}\int_0^T \sin^2(\omega_0 t+\phi)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}(1-\cos 2(\omega_0 t+\phi))dt = \frac{1}{2T}\int_0^T 1\cdot dt - \frac{1}{2T}\int_0^T \cos 2(\omega_0 t+\phi)\cdot dt$$

となりますが, 第 2 項の$\int_0^T \cos 2(\omega_0 t+\phi)\cdot dt$は, 角振動数$\omega_0$の 2 倍の速さで振動する（周期 T/2）コサインを, その周期の倍だけ積分すると, 正の部分と負の部分が同じ大きさで出てくるので, 0 になります. 式で書くと

$$\int_0^T \cos 2(\omega_0 t+\phi)\cdot dt = \frac{1}{2\omega_0}\left[\sin 2\,(\omega_0 t+\phi)\right]_0^T = \frac{1}{2\omega_0}\{\sin 2\,(\omega_0 T+\phi) - \sin 2\phi\}$$

ここで$\omega_0 T = 2\pi$を代入すると, $\sin 2\,(2\pi+\phi) = \sin(4\pi+2\phi) = \sin 2\phi$ となってこの項が 0 となります.

こうして

$$\frac{1}{T}\int_0^T \sin^2(\omega_0 t+\phi)\,dt = \frac{1}{2T}\int_0^T 1\cdot dt - 0 = \frac{1}{2T}\times T = \frac{1}{2}$$

となります.

例題 7.5(2)

Q. 力を微分で表していますが、これから先は微分積分の式のみで力を求めることになるのでしょうか。

A. もし位置エネルギーが先に与えられているときは, 力はその微分係数として求めます.

また（1 次元の運動については）位置だけで決まる力が先に与えられているときは, 位置エネルギーを積分により求めます.

なお,「位置だけで決まる力」という制限により除外されるものは,

・速度に依存する力（たとえば, 摩擦力. 速度の向きにより力の向きが変わる）

・時間に依存する力. ただし, 時間依存性が見掛けのもので, $x(t)$の形でまとめることができるときはこの限りではありません.

Q. $V(x) = V_0\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$と$F(x) = -\frac{4V_0}{(e^x+e^{-x})^2}$のグラフの描き方がわかりません。

A. 増減表をつくってグラフを描く練習は高校卒業と同時に忘れた・・・かもしれませんね.

増減表を書くのが面倒なときにも, 次の手順が役立ちます：

① 対称性を調べる. $f(-x)=f(x)$のときを偶関数といい, 縦軸について対称になります. したがって, 縦軸を横切るところでグラフの傾きは 0. $f(-x)=-f(x)$のときを奇関数といい, 原点を通ります. 縦軸や原点以外の点について対称かどうかを判定できれば, その情報も用います.

周期があるかも, 調べましょう.

② グラフが通過する代表的な点を何点か計算. 横軸や縦軸との交点はぜひ欲しいです.

③　漸近線（$x \to \pm\infty$のときに関数が接近していく直線や曲線）

④　あとは微分法を用いて，特定の通過点での傾きや，変曲点など.

⑤　テーラー展開をして初めの何項かをとり，関数の特徴を多項式として捕まえることもできます.