Q. 他の問いでも公式の組み合わせで解けるのでしょうか。

A. どんな問題も原理にもどって解くことができます．どの公式を使おうか，判定ができないような状況なら，原理にたちもどるほうが問題を速く解けることがよくあります．

公式を使うのは，思考作業を節約していることです．思考力の鍛錬には，公式を使わずに，根底にある原理（たとえば運動方程式）までもどって，そこから論理や数学で答えを導くトレーニングが役立ちます．一方，公式あるいは定理（たとえばエネルギー保存側）を使うことも，より複雑な問題に挑戦するときは必要になるかもしれません．それは，より先のことに思考力を使う必要があるからです．

例題 6.2

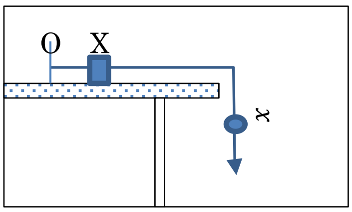
Q.「糸の質量を無視するから張力はどこでも一定」というとかろを説明してください．

A. 糸が加速度運動していなければ，質量があろうと無かろうと，張力はどこでも一定です．それは，糸の一部の運動を考えると，その部分の両端にくわわる張力が等しいから合力が 0 となり，静止を保つ，あるいは等速度運動を続けることができます．一方，質量が 0 ならば両端に加わる張力の和が 0 でも加速度運動が可能です．

Q.(6.20)で張力を $-\boldsymbol{T}$ としたのは， $\boldsymbol{x}$軸を左向きに正としたからですか．

A. そのとおりです．

Q. $\frac{d^2}{dt^2}(x+y)=\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{d^2y}{dt^2}=0$ （$x+y=d$）という式をたてるとき，x 軸と y 軸の方向が逆向きなので理解しづらいです．



A. 講義時間内で紹介したように「糸に沿って折れ曲がったx軸」をとればわかりやすいと思います．物体Mの座標をX，mの座標をxとすると「糸の長さがℓ」は $x-X=\ell$となります．また各物体の運動方程式は

$$M\frac{d^2X}{dt^2}=T,\quad m\frac{d^2x}{dt^2}=mg-T$$

となり，$\frac{d^2X}{dt^2}$と$\frac{d^2x}{dt^2}$の差をとると

$$\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{d^2X}{dt^2}=\frac{d^2}{dt^2}(x-X)=\frac{d^2\ell}{dt^2}=0,\qquad \frac{d^2x}{dt^2}-\frac{d^2X}{dt^2}=\frac{mg-T}{m}-\frac{T}{M}=g-T\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)$$

したがって

$$g-T\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)=0,\qquad \therefore T=\frac{g}{\frac{1}{m}+\frac{1}{M}}=\frac{mM}{m+M}g$$

となり，$M\frac{d^2X}{dt^2}=T=\frac{mM}{m+M}g$，すなわち

$$\frac{d^2X}{dt^2}=\frac{m}{m+M}g$$

です．Xは，座標軸の向きを比較すればわかるように，教科書のxと符号が反対です．ここでは原点の位置を記しませんでしたが，$\frac{d^2X}{dt^2}$と$\frac{d^2x}{dt^2}$の式には原点の位置が陽に出てこないので問題ありません．

例題 6.4

Q.式(6.44)で$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$とありますが、なぜ周期はどの運動もこの式で表せるのですか？円運動と振動では運動とでは動きが違うと思います。

A.等角速度円運動を，円が乗る平面上に目を置いて眺めると，単振動に見えます．半径 R の円周上をT（周期）で一回転（2π）するとき，角度が変化する速さ（角速度）は 2π/T となります．横から眺めたときの単振動も同じ周期で振動し，そのときの角振動数がもとの円運動の角速度と一致します．式で表すと，円運動する点の座標は時間の関数として

$$x(t) = R\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = R\cos\omega t\ , \qquad y(t) = R\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = R\sin\omega t$$

これを x 軸方向から眺めたとき$x(t)$が見えるので，単振動となります．

Q. 2) 式(6.43)式から「運動は単振動である」としていますが，その根拠は何ですか.

A.式(6.31)から(6.33)，さらに(6.40)に至る部分が根拠です．この部分を学習すると，$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$を満たすxが，$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)$，$\omega_0 = \sqrt{k/m}$,という単振動になることがわかります.

Q. 3) 「$mg = k'(2a)$すなわち$k' = \frac{mg}{2a} = \frac{k}{2}$」のところがわかりません。なぜ$2mg = k'(2a)$ではないのですか.

A.　式(6.46)の上の文章を読むと「図 6.9 のように質量 m の質点をつるして・・・」とあります．この状況下で$mg = k'(2a)$という式をたてました.

例題 6.5

Q. 「地球はその中心に全質量が集中している質点としてよい」というような近似あるいはモデルを思いつくためには，どんな訓練をすればよいですか.

A. 「質量の分布が球対称なら，球体の外側から見たとき，全質量が中心に集中しているときと同じ重力を感じる」というのは積分法により証明できます．地球を球と見なせば計算が非常に簡単になるというのは，だれでも思いつくでしょう．どんな（理想的な）場合を想定すればどんな結論が導けるか，経験しておく必要がありますね．それには，他人の経験を学んでもよいし，誰も未経験のことならば自分で想像しながら簡単化できる理想系について「定理」をつくることになります.

地球の近くの重力を扱うには，もう少し進化したモデルをつくる必要があるでしょう．地球は南北極の方向に押しつぶされた形で，赤道面内と南北極を通る面内とで地球の半径がわずかに（0.3%程度）異なりますが，概ね約 6400 km．そこで，地球の質量が中心付近にある小さな円板上（あるいはもっと簡単にリング上）に集中しているとしたら・・・などと考えることもできるでしょう.

比較的低空を飛ぶ人工衛星の軌道の計算には，さらに詳細なモデルが必要となりますが，結局のところ，実際の軌道を観測して地球の重力の分布を調べる以外ないということになります.

できるだけ簡単な計算で，できるだけ真実に近い結論を導けるのが理想ですが，それには経験だけでなく（経験が育てる部分もありますが）直感力も要求されるため，物理学の実践が難しいという感じを持つ人がおおぜいいます.

各人の能力によって訓練の仕方にも差が出てくるのだと思います．興味があれば個人的に話をしましょう.

例題 6.6

Q. このような計算ではどのようにおおまかな値を出すのでしょうか。

A. 有効数字を何桁まで出すかに注意します．この問では 2 桁で計算しようと考え，式(6.67)の最後から二番目の辺で，有効 2 桁の数を代入しています．式中で 2π は「円であれば理論的に正確な 2π」であることを示していますが，式の値を求める段階では 2→2.0，π→3.1 とします．

問題 6.1

Q. $\left|\frac{d^2x}{dt^2}\right|$**の計算がどのような手順を踏んでいるのか、見当がつかずにいます。2 階微分を絶対値にしているのでしょうか.**

A. $\left|\frac{d^2x}{dt^2}\right|$は$\frac{d^2x}{dt^2}$の符号を除いた部分すなわち「加速度の大きさ」のことです.

問題 6.2

Q. 摩擦力は、いつでも物体の運動を邪魔するように働くものだと思っていましたが，自動車の前輪と後輪には逆向きに働くというので，混乱しています.

A. 「摩擦力は，接触する物体間に作用し，互いの運動を邪魔するように働く」というのは常に正しい表現です．両物体が接触したまま相対速度が 0 のとき（たとえば両方が静止しているとき）新たな運動が起きないように作用し，すでに相対速度が 0 でないときは，その速度を 0 とする向きに力が生じます．これは，空気による摩擦でも，固体が接触しているときの摩擦でも同じです.

　では，自動車や自転車の駆動輪および非駆動輪と地面との間に作用する摩擦力はどのようになっているのでしょうか．駆動輪は，摩擦がないときに空転する向きから分かるように，タイヤが地面を蹴るように運動をします．その運動を妨げる向きに地面から摩擦力が加わるとき，摩擦力はタイヤを蹴り返す向きです．一方，非駆動輪は，地面との摩擦力によって回されますから，その摩擦力の向きは駆動輪が地面を蹴った方向になります.

問題 6.5

Q. 「求める解は・・・」までの筋道を追えませんでした.

A. 本文の§6.3（とくに p.94～95）を理解する必要があります.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + {\omega_0}^2 x = 0$$

を満たす関数$x(t)$はどのような関数かというナゾナゾですが，答え

$$x(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$$

知っていればそれで良し！答えかどうかは，代入して確かめればわかります．ただし，これ以外に答えが無いか心配なら，少し進んだ議論が必要になります：「2 階微分方程式は 2 個の独立な解をもつ」という定理があり，サインとコサインが独立なので，これで大丈夫なのです.

●もうすこし論理的に考えると，$\frac{d^2x}{dt^2} = -{\omega_0}^2 x$は，2 回微分すると，もとと同じ形の関数（定数倍違ってもよい）で符号が逆というのだから，サインとコサインがそれぞれ答えになり，サインとコサインの線形結合も答えだということが分かるはずです.

●さらに，こんな考え方もあります．もし$x(t)$の関数形が分かり，しかも原点付近で滑らか

なら，マクローリン展開できるはずだから

$$x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + \cdots$$

と書けるはずだから，この展開式を$\frac{d^2x}{dt^2} = -{\omega_0}^2 x$に代入し，係数$a_n$の関係を導きます．

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) = \frac{d}{dt}(a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + 4a_4 t^3 + \cdots) = 2a_2 + 3\cdot 2\, a_3 t + 4\cdot 3\, a_4 t^2 + \cdots$$

$$= -\omega_0^2(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + \cdots)$$

どんなtについても（すくなくとも原点付近で）等号が成り立つとすれば，t の次数ごとに係数を等しいとおき

$$2a_2 = -\omega_0^2 a_0,\quad 4\cdot 3\, a_4 = -\omega_0^2 a_2 = -\omega_0^2\left(-\frac{\omega_0^2}{2}a_0\right), \cdots,$$

$$3\cdot 2\, a_3 = -\omega_0^2 a_1, \qquad 5\cdot 4\, a_5 = -\omega_0^2 a_3, \cdots$$

という関係が見つかります．そうすると

$$x(t) = a_0 + (a_1/-\omega_0)(-\omega_0 t) - \frac{a_0}{2!}(\omega_0 t)^2 + \frac{a_1/(-\omega_0)}{3!}(-\omega_0 t)^3 + \frac{a_0}{4!}(-\omega_0 t)^4$$

$$+ \frac{a_1/(-\omega_0)}{5!}(-\omega_0 t)^5 \cdots$$

$$= a_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{a_1}{-\omega_0}\sin(\omega_0 t)$$

● 初期条件と$x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + \cdots$の係数の関係を求めると

$$x(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t \quad\Rightarrow\quad A = a_0,\ B = -a_1/\omega_0$$

$$x(0) = a_0 = A, \qquad \frac{dx}{dt}(0) = a_1 = -\omega_0 B$$

● 巻末略解についての解説は，WebPage の「問題詳解」の項を参照してください．