例題 4-1

Q. どうして「$T \propto l^a g^b$と仮定する」ことができるのか，不思議です．

A. たいへんもっともな質問だと思います．ガリレオが教会の天井から吊り下がるランプの振動を観察して振り子の等時性を推定した話は有名ですが，振り子の周期運動については古来おおくの人が観察をしてきました．私たちも手元の穴あき硬貨と紐ですぐに実験できるのですが，まず紐の長さで周期が変わってくることにすぐ気づきます．そうすると

$$T \propto \ell^a$$

とおいて，aがどんな値になるかを調べたいと思うわけです．

ここで，時間の次元をもつTと長さの次元をもつℓは，ℓを何乗しても互いに「何倍違うか」を比較することができません．そこで，この振り子の運動に関係があり時間の次元を含む量を用いてTと比較できるものを作ろうと考えます．

もし無重力なら振り子は運動しません．振り子運動の片道を「速度 0 から円形の坂道を転がり落ちる」と考えると，最下点までの時間（周期の 1/4）が重力加速度に関係しそうだと予想がつきます．そこでgを取り込んで

$$T \propto \ell^a g^b$$

と考えるわけです．

一方，より詳しい観察をすると，ℓが一定であっても振幅が大きいと周期が長くなることがわかります．そこで最大振幅を与える振れ角θ_{max}も含めて

$$T \propto \ell^a g^b \theta_{\mathrm{max}}^c$$

としたとしても，θ_{max}は無次元なので，周期のθ_{max}への依存はわかりません．運動方程式をとくと

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \times \{\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2 \sin^{2n}\left(\frac{\theta_{\mathrm{max}}}{2}\right)\}$$

となることが知られています（!!は一つおきに階乗をとる記号）．

Q. $[l^a g^b] = [\mathrm{L}]^a \cdot [\mathrm{LT}^{-2}]^b = [\mathrm{L}^{a+b}\mathrm{T}^{-2b}]$の変形で$[l^a g^b] = [\mathrm{L}^a] \cdot [\mathrm{LT}^{-2}]^b$となる理由がわかりませんでした。

A. この「＝」は，ℓの次元は長さ（$[\ell] = [\mathrm{L}]$），gの次元は加速度（$[g] = [\mathrm{LT}^{-2}]$）に基づく変形です．たとえば，坂道を転がるボールの加速度（坂道に沿って測る）aと重力加速度gは同じ次元をもつので，$[a] = [g] = [\mathrm{LT}^{-2}]$と書きます．また，このボールに加わる重力は，ボールの質量をmとすると，mgになりますから，$[mg] = [m][g] = [\mathrm{M}][\mathrm{L}][\mathrm{T}]^{-2}$と書けます．

Q. この考え方を使う例は他にありますか．

A. たくさんあります．

講義時間内で紹介した「バネに結ばれた質量」の運動では，ばね定数をkとすると，$T \propto k^a m^b$から$T \propto \sqrt{\frac{m}{k}}$が求まります．空気中の音速$v$が空気の密度$\rho$と圧力$p$に対して$v = \rho^a p^b$とおいて$v \propto \sqrt{\frac{p}{\rho}}$が求まります． もっと例をあげることもできますが・・・

問題とは関係なく

Q. 作用、反作用の法則が適用される「2 物体が力を及ぼしあっている」状況がイメージしづらいです．

A. 力は物体と物体の間に作用するものです．後に学ぶ遠心力や慣性力は，何が源となる力かを言うことができませんが，これらは「みかけの力」で座標を慣性系に選ぶと消えてしまいます．本物の力（物体が他の物体に及ぼす力）は，たとえば壁に手をついたとき壁が手を押す力（接触力の例），ボールが地球から受ける重力（遠隔力の例）などを思い浮かべればよいと思います．

物体 1 が物体 2 に力を及ぼすとき（地球がボールを引っ張るとき），物体 2 は物体 1 に力を及ぼしています（ボールが地球を引っ張る）．このような状態をさして「2 物体が力を及ぼしあっている」と表現します．

例題 4-2

Q.「物体を質点とみなす」は書かないといけないのだろうか。

A. 質点とみなさないときは，物体に大きさや形を考えて，物体の重心の位置，糸をとりつけた場所などを考慮することになります．そういうことをサボりたいときは，一言ことわっておくのがよいでしょう．

Q. $\sqrt{3}$は使わずに 1.73…を代入した方が良いのですか？

A. 計算して数値を出す場合には近似値を代入しましょう．「その値はいくつになるか」と尋ねたのに「√３の５倍です」などと答えたら，√３の値を知らないと言ってるのと同じです．変数を文字で表す式では√やπを残しておいたほうが，その意味がわかりやすいことがあり，そのときは残します．

例題 4-3

Q. 作用、反作用の法則がわかりません。互いに力を及ぼしているのはわかるが、P65 の親と子供の例のように子供が引っ張られているのに等しい力がくわわっているということがよくわかりません。

A. ２つの部分ＡとＢから成る物体を考えます（A=親, B=子で，物体は「親＋子」）．Ａに加わる力$\vec{F}_\mathrm{A}$とＢに加わる力$\vec{F}_\mathrm{B}$の和（$\vec{F}_\mathrm{A}+\vec{F}_\mathrm{B}$）が物体に加わる力です．

物体に外部から力が加わらないのに，物体が加速度運動をするという経験はしたことがありません．したがって，外部から力が加わらないなら$\vec{F}_\mathrm{A}+\vec{F}_\mathrm{B}=0$となります．式を変形すると$\vec{F}_\mathrm{A}=-\vec{F}_\mathrm{B}$です．外部から力が加わらないのだから，$\vec{F}_\mathrm{A}$と$\vec{F}_\mathrm{B}$は物体内部で作用する力しかありません．Ａに加わる力$\vec{F}_\mathrm{A}$は，ＢがＡに及ぼす力です．Ｂに加わる力$\vec{F}_\mathrm{B}$はＡがＢに及ぼす力です．こうして，ＡとＢの間に作用する力は互いに大きさが同じで逆向きです．

２つの力$\vec{F}_\mathrm{A}$と$\vec{F}_\mathrm{B}$が一直線上にないと，静止している物体に回転運動が起きます．外から力が加わらない物体の回転が激しくなるという経験もしたことはないので，$\vec{F}_\mathrm{A}$と$\vec{F}_\mathrm{B}$が一直線上に乗ります．

例題 4-4

Q. 力積が運動量の変化に等しいなら，わざわざ力積を定義する必要がないのでは？

A. 力積は$\int_{t_B}^{t_A}\vec{F}(t)\,dt$と定義され，力が不変のとき$\int_{t_B}^{t_A}\vec{F}(t)\,dt=\vec{F}\cdot(t_B-t_A)$となることから分かるように，その内容は力と時間の積，すなわち名前のとおりです．

運動法則$\frac{d\vec{p}}{dt}$=$\vec{F}$を用いて力積を変形すると，$\int_{t_B}^{t_A}\vec{F}(t)\,dt=\vec{p}(t_B)-\vec{p}(t_A)$となるので，力積は力が物体の運動に及ぼす効果を（微分ではなく）積分で表したものです．その効果が運動量の変化となって現れるのです．「力が原因となって運動状態が変化する」と考えるのが力学の態度なので，$\int_{t_B}^{t_A}\vec{F}(t)\,dt=\vec{p}(t_B)-\vec{p}(t_A)$の左辺は原因で右辺が結果を表していると言えます．

等式の両側にある量は，次元（単位）と数値が同じものですが（奥深くでは同一の内容をもつ量であるかもしれないですが）見掛けが違う場合があります．このようなとき，見掛けの違いゆえに，別の名前をつけて生かしておくこともあるのです．

Q. 運動量($-mv$)の負号はどのように理解すればよいですか.

A. 運度量＝質量×速度，速度はベクトルですから，運動量もベクトルです．一般に，ベクトル$\vec{\mathrm{A}}$に対して，$-\vec{\mathrm{A}}$は$\vec{\mathrm{A}}$と同じ大きさで逆向きのベクトルです．運動量 $-\vec{p}$は，$\vec{p}$と同じ大きさで逆向きのベクトルです．質量mは負になりませんから， $-\vec{p}$と$\vec{p}$では速度が逆向きです．

１次元（直線上）の運動では，ベクトルの１つの成分だけを論じるのと同じことです．$\vec{p}$のx成分を$p_x=mv_x$とすると逆向きの速度$-v_x$で運動する物体の運動量が$-p_x$となります．

問題 4-1

Q.円運動の速さの公式が分かりません.

A. 公式は覚えるのでなく考え出してください！

等速円運動の場合，円周を$2\pi r$としこれを１周する時間をTとすると，速さ=距離÷時間,

しがたって$v = \frac{2\pi r}{T}$です． 2πラジアン回転するのに要する時間がTのとき角速度$\omega = \frac{2\pi}{T}$と定義されるので，$v = r\omega$です．

Q. 加速度が 0 となるのは，切れた「瞬間」ではなく「直後」ではありませんか？

A. 切れた瞬間には糸は繋がっていません！「直後」でも同じ内容だと思います．次の Q&A の後半も読んでください．

Q. 慣性の法則がどのように利用されているか分かりません．

A. 慣性の法則は「力が作用しない物体は，慣性系で見ると，等速度運動（等速直線運動）を続ける」というものです．

糸につながって円運動をしている物体は（糸の張力を受けて円運動という加速度運動をしているので）慣性の法則を適用することはできません．しかし，糸が切れた瞬間から後の時間では力が作用しないので慣性の法則が適用されます．慣性の法則により等速度運動を続けるのですが，その速度の大きさと向きは，糸が切れて力が作用しなくなった瞬間から不変です（「等」速度）．糸が切れた瞬間の速度が，以後それがずっと続くのです．

「糸が切れる」のにほとんど時間がかからないとすると，「切れる間に加わる力」による力積は 0 と考えられ，切れる前後で運動量は変わりません．したがって，切れる直前の速度と直後の速度は同じです．こうして，切れる直前の円運動の速度を計算できれば答えを得ることが出来ます．

問題 4-2

Q. どのような場合に $F = ma$ が使えないのですか．

A. 左辺の力が「本物」のとき，いいかえると「他の物体から加わる力」のとき，この式は慣性系でだけ成立します．慣性系（力が加わらない物体の運動が等速度運動に見える系）に固定した座標を用いて測定した加速度aを用いたときだけ，本物の力Fとの間に$F = ma$が成り立ちます．

慣性系でないとき，たとえば回転する座標系（メリーゴーラウンドに乗った観測者，自転を考慮しなければならないときの地球上の観測者）や加速中の座標系（発進する電車）などでも，$F = ma$の式を使うには「本物ではない力」を左辺に付け加える必要があります．その例が遠心力やコリオリ力あるいは慣性力などです．

問題 4-3

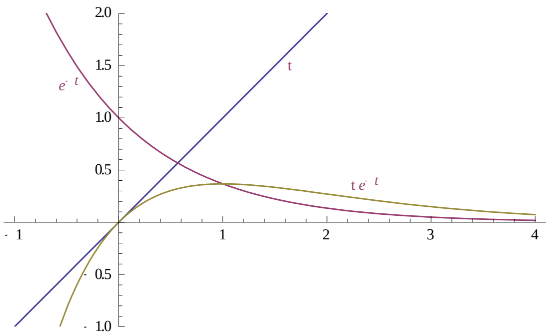
Q. $x = Rte^{-\alpha t}$の微分のしかたが分かりませんでした．

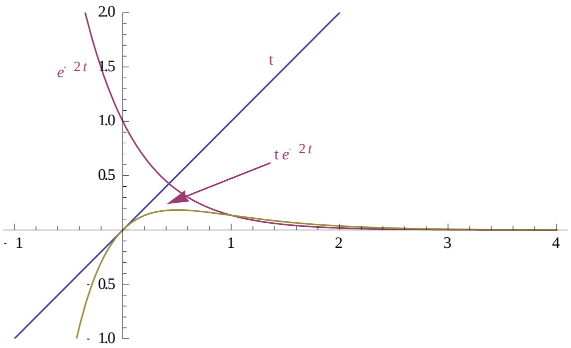
A. $f(t) = Rte^{-\alpha t}$と書いたら分かりやすいのでしょうか？$x(t)$でも$f(t)$でも同じことなのですが・・・Rが定数ですから，まず$\frac{d}{dt}f(t) = \frac{d}{dt}(Rte^{-\alpha t}) = R\frac{d}{dt}(e^{-\alpha t})$．つぎに変数を$s = -\alpha t$に変換すると，$\frac{d}{dt}(e^{-\alpha t}) = \frac{d}{dt}e^s = \frac{ds}{dt}\cdot\frac{de^s}{ds} = \frac{d}{dt}(-\alpha t)\,e^s = -\alpha\,e^s = -\alpha e^{-\alpha t}$ となります．

Q. これらは，どのような運動をしているのでしょうか．

A. (1)は位置座標xだけが指定されているので直線上（x軸上）の運動と考えます．そこでtx図（ある時刻tにどの位置xにいるかを，関数$x(t)$のグラフで表した図）を描きましょう．

Rは$t\,e^{-at}$の全体を何倍するかを示す定数なので，グラフを概観するときは 1 としてもかまいません（あとで縦軸をR倍に引き伸ばせばよいのです）．e^{-at}のaはグラフの形に大きく影響するので，aの大きさが異なるとどうなるか幾つかの例（ここでは$a = 1$ と 2）を観察します． $t\,e^{-at}$は傾き 1 の直線tと指数関数e^{-at}の積なので，それぞれのグラフを描いてグラフ上でかけ算をしてください．それだけで，わかりやすい通過点や極限がただちに分かるはずです．必要なら$t\,e^{-at}$の極値や変曲点などは微分を使って論じます．





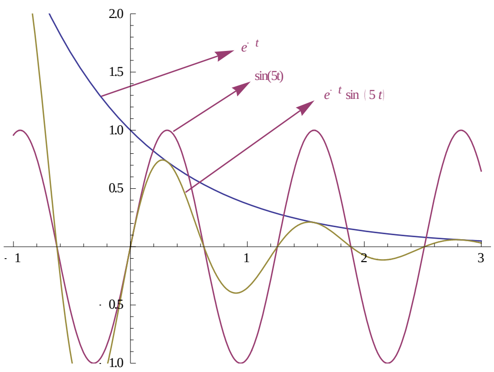
このときの運動は，最初にx軸正方向の速度で動き、$t=0$で原点を通過し、しばらくすると向きを反転し、速さを減らしながらかぎりなく原点に接近します．aが大きいほど早いうちに速度の反転が起きます。しかし原点を通過するときの速さはaによらず一定です．

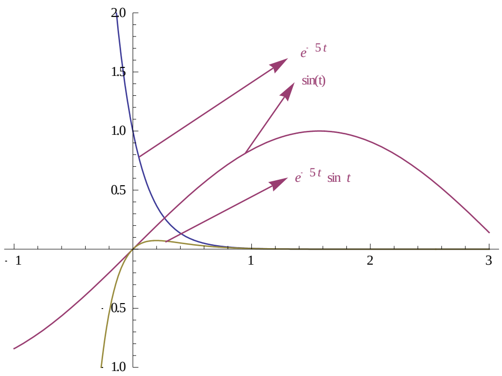
速度を微分によって求めると

$$\frac{dx}{dt}=R(1-at)e^{-at}$$

となり、速度の反転が起きる時刻が$(1-at)=0$すなわち$t=\frac{1}{a}$，原点を通過する$t=0$における速度がRとなることも分かります．

(2) についても同様に$x=R\,e^{-at}\sin\omega t$を要素に分解してtx図の概略を求めます．





この場合は，aとωの大小関係によりグラフの様子が異なります．ωが大きいとき，何度もサイン関数の振幅が指数関数的に減衰していくグラフとなります．ωが小さいとき，指数関数が大きいうちはサインによる振動が見えていますがそのうち（振動は残っていますが）減衰だけが見えてきます．この中間に「振動が見えない」臨界とよばれる状況が起きます．詳しくは教科書の 15 章以下で勉強します．

(3) 2 次元（平面上）の運動なので，まず軌道の形を求めましょう．太字を使ってベクトルを表すと

$$\boldsymbol{r}=x(t)\boldsymbol{e}_x+y(t)\boldsymbol{e}_y=(2R\cos\omega t)\,\boldsymbol{e}_x+(R\sin\omega t)\boldsymbol{e}_y$$

なので$x(t)=2R\cos\omega t$，$y(t)=\ R\sin\omega t$です． この 2 式から t を消去して x と y の関係を求めると，それが軌道の式です：

$$\left(\frac{x}{2R}\right)^2+\left(\frac{y}{R}\right)^2=\cos^2\omega t+\sin^2\omega t=1$$

楕円軌道であることが分かります．速度の向きは軌道の接線方向であることが分かっていますから，あとは速さを求めましょう：

$$v=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{(2R\omega)^2(-\sin\omega t^2)+(R\omega)(\cos\omega t)^2}=R\omega\sqrt{4\sin^2\omega t+\cos^2\omega t}=R\omega\sqrt{3\sin^2\omega t+1}$$

こうして，たとえば時刻$t=0$における速度は，大きさが$R\omega$，向きが点$(2R,0)$における接線すなわち垂直上向きなどという情報が得られます．

問題 4-4

Q ひもと水平線のなす角を θ とおいても計算は可能ですか.

A. もちろん可能です．やってみれば，すぐに分かるはず・・・

問題 4-5

Q. 重心からの距離の比が$\frac{m_2}{m_1}$という式がどのように導かれたのか分かりませんでした.

A. x軸上に 2 質点があるとしましょう．重心の座標は$X=\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}$です．質点 1 から重心までの距離は

$$x_1-X=x_1-\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}=\frac{x_1(m_1+m_2)-(m_1x_1+m_2x_2)}{m_1+m_2}=\frac{m_2}{m_1+m_2}(x_1-x_2)$$

同様に質点 2 から重心までの距離は

$$x_2-X=x_2-\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}=\frac{m_1}{m_1+m_2}(x_2-x_1)$$

これより，重心までの距離の比は$\frac{m_2}{m_1}$となります.