例題 3-1

Q. 問題文のベクトル$\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$の条件に「平行でない」ことは書かれていないが、それでよいのだろうか.

A. この問でベクトル$\mathbf{A}$の役割は，$\mathbf{B}$を互いに直交する２成分に分解するときの“方向の基準”であって，それ以上のものではありません．したがって，もし$\mathbf{A}$が$\mathbf{B}$と平行なら，$\mathbf{A}$がなくてもかまわないわけです．こうしてみると，$\mathbf{A}$が$\mathbf{B}$と平行な場合は最初から除外していると考えるのが普通でしょう．実際，平行なら，(3.9)は$\mathbf{B}=\mathbf{B}$となり自明.

例題 3-2

Q. 式(3.22)の$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\mathbf{A}_{//}\cdot\mathbf{B}$という式の$\boldsymbol{A}_{//}$は「B に平行なベクトル$\mathbf{A}_{//}$」という意味か?

A. 正確に言うと，「B と平行な方向および垂直な方向の成分に A を分解したときの前者」です.

Q. 解答の後半，同様にして以下は　$\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{B}_{||}\Rightarrow\boldsymbol{A}_{||}\cdot\mathbf{B}$が成り立つからこの $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\boldsymbol{A}_{||}\cdot\mathbf{B}$がいえるのだろうか

A. 「A と B の役割を交換すれば．同様に」と考えるのが題意です．もちろん，質問のように$\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{B}_{||}\Rightarrow\boldsymbol{A}_{||}\cdot\mathbf{B}$が成り立つ（$\mathbf{A}$と$\boldsymbol{B}_{||}$が平行だとなぜ$\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{B}_{||}\Rightarrow\boldsymbol{A}_{||}\cdot\mathbf{B}$となるかという議論を展開する必要があります）ことを言ってもかまいません.

例題 3-3

Q. $\vec{A}\cdot\vec{B}=(\cos\varphi_A\cos\varphi_B+\sin\varphi_A\sin\varphi_B)=AB\cos(\varphi_B-\varphi_A)$の変形で，括弧内の掛け算を引き算にする操作は公式なのでしょうか。

A. $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ をコサインの加法定理と言います.

Q. 解説の式に$A_xB_x+A_yB_y=AB(\cos\varphi_A\cos\varphi_B+\sin\varphi_A\sin\varphi_B)$　となっているが、どのようにしてこの式が導き出されたのか。

A. $A_x=A\cos\varphi_A, B_x=B\cos\varphi_B$ などを左辺に代入しました.

Q.「論理を逆転し」がどのように逆転させたのかわかりません。

A. 本文の式(3.23)から(3.30)までに「ベクトルを成分表示すると式(3.10)で定義される内積が$A_xB_x+A_yB_y$と表される」ことを示しました．この問では，式(3.30)で内積を定義すると(3.30)になることを証明しています．論理の展開が逆ですね.

Q. 問題を読んで、この図を描くのは慣れですか？

A. 慣れ・・・確かに・・・だれもがやる定石だと思います.

例題 3-4

Q. 「原点を中心とする円運動では，位置ベクトル$\mathbf{r}$の大きさrが一定であるから$\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}=r^2$である」のところがわからない

A.まず，質点 P が原点 O を中心とする円の上を運動するとき，OP は円の半径だから，OP の長さは一定です．このことを P の位置ベクトルすなわち$\mathbf{r}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$を用いて表すと「位置ベクトル$\mathbf{r}$の大きさ$r$が一定」となります．教科書でベクトル$\mathbf{r}$の記号が太字の斜体$\boldsymbol{r}$，その大きさが並字の斜体$r$で表されているので，気をつけて見る必要があります.

　つぎに，位置ベクトル$\mathbf{r}$の大きさ$r=|\mathbf{r}|$は，$\mathbf{r}$と（自分自身である）$\mathbf{r}$の内積を用いて表せます．自分自身となす角は 0 だから，$\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}=|\mathbf{r}||\mathbf{r}|\cos 0=|\mathbf{r}|^2=r^2$ です.

Q. 式(3.45)を解説してください.

A. まず, 前文に「((3.44)の）最左辺を時間で微分すると」あるので，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}$とあるのは$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{r}\right)\cdot\mathbf{r}$ではなく$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r})$であることがわかるでしょう．すなわち，$\mathbf{r}$の自分自身との内積を時間$t$で微分します．また「時間で微分する」というのですから，位置ベクトルが時間的に変化することを念頭においていることも分かるでしょう.

つぎに，位置ベクトルを適切な直交座標系で成分表示すると式(3.39)にならって$\mathbf{r}(\mathrm{t}) = x(t)\boldsymbol{e}_x + y(t)\boldsymbol{e}_y$と書けることもわかっています．そうすると，$\mathbf{r}\cdot\mathbf{r} = r^2 = x(t)^2 + y(t)^2$なので，$x(t)^2 + y(t)^2$のことを簡単に$x^2 + y^2$と書いたのだとも推察できるでしょう．一方，$\mathbf{r}\cdot\mathbf{r} = r^2 =$ 一定の「一定」は，時間の関数として「一定値を保つ」です．

時間微分を実行します：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x^2+y^2) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y^2 = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^2 + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}y^2 = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}2x + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}2y = 2\left(x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)$

最後の辺は，2 つのベクトル$\left(x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y\right) = \mathbf{r}$と$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_x + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_y\right) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}$との内積で表現すると，$2\mathbf{r}\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}$となります．

Q. 式(3.46)から「すなわち・・・，したがって・・・」と書いてあるが，式とどのように対応しているか分からない．

A. $2\mathbf{r}\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = 0$したがって$\mathbf{r}\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = 0$です．円周の上にあって運動する点の位置ベクトル（暗黙に，原点は円の中心と定めています）は$\mathbf{r}$，速度ベクトルは$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}$，これらの内積が 0 と(3.46)に書いてあります．0 でないベクトルの内積が 0 のときは両者が直交します．したがって，円運動する点の（中心を視点とする）位置ベクトルと速度ベクトルが直交します．

Q. 速度が円の接線の方向を向いていることは，どうすればわかるのだろうか。

A. 放物運動，円運動，楕円運動，その他どんな曲線運動であろうと，速度ベクトル$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}$は微小変位$\mathbf{dr}$をその変位に要した時間$\mathrm{d}t$で割った量です．時間$\mathrm{d}t$はスカラーなので，$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}$は$\mathbf{dr}$と同じ向きのベクトルです．微小変位$\mathbf{dr}$は，点の運動の軌跡（曲線）の非常に接近した 2 点を結ぶベクトルで，その点における接線の方向となります．こうして速度ベクトルは必ず軌道の接線方向に一致します．

Q.「証明せよ」という問題のとき，式だけ書いてもいいですか？

式に用いる記号の説明（たとえば x とか y が何を意味するか）を書かなくていいですか？

A. 教科書の例題で「証明せよ」とあるときも，解では「証明の書き方」の手本というより，内容を解説しています．証明の書き方は，だれを相手にするかで違ってきます．試験の解答は自分が分かっているという主張ですから，そのように書いたらよいのです．教科書としては，例題の前には本文の説明があるので，そこに出ている記号を再度解説する紙面の余裕も（義務も）ないと思います．

例題 3-5

Q. いきなり$\boldsymbol{e}_x$や$\boldsymbol{e}_y$が出てくるが，これらが正規直交基底をつくるベクトルだということは，きちんと言わなくてよいのだろうか．

A. 教科書の例題や問題は，それだけが独立して書かれているわけではなく，それ以前に書いた本文の内容と密接にリンクしています．そのような場合，共通に用いる記号をあらためて説明することは，通常しません．この教科書では$\boldsymbol{e}_x$や$\boldsymbol{e}_y$と書くと，最初に導入したあとは，互いに直交し（内積が 0），長さが 1 であることを前提にしています．私が知るかぎり，基底ベクトルを表すときに $\mathbf{e}$ や $\mathbf{f}$ (ときには $\mathbf{g}$ も)の文字を用い，n 次元系で$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \cdots, \mathbf{e}_\mathrm{n}\}$などとすることがよくあります．　3 次元空間の場合には$\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$とすることがよくあります．

Q. ベクトル(x, y, z)の大きさが$\sqrt{x^2+y^2+z^2}$となるのは何故か．次元を 3 から n に増やしたとき同じように定義するのだろうか．

A.この問に関係する質問ではないのですが，重要なことなので説明をします．線型代数学でベクトルというのは，ベクトル空間という集合の元と位置づけられます．その空間は「2 つの元の間にある特定の性質をもつ演算（周知のベクトル和です）が定義され，その演算の結果がふたたび同じ空間に入るものとして定義されます．この段階では，ベクトルの長さあるいは距離という概念は全く存在しません．そこに「二つのベクトルの和の長さが，それぞれの長さの和より小さい」という性質をもつなら，どんな方法で長さを定義してもよい，とします．たく

さんある長さの定義の中で$\sqrt{x^2+y^2+z^2}$は，よく知られているユークリッド空間の長さと同じになるものです．

Q. 途中の計算は理解したのですが，$\boldsymbol{a}=-\omega^2\boldsymbol{r}$という式から，どのようにして「加速度ベクトルは位置ベクトルと平行で向きが反対」という結論が出てくるのですか．

A. 二つのベクトル$\mathbf{A}$と$\mathbf{B}$が全く同じなら$\mathbf{A}=\mathbf{B}$，もし同じ方向で大きさが違えば$\mathbf{A}=c\mathbf{B}, \mathrm{c}>0$です．$\mathbf{A}$と$\mathbf{B}$が同じ大きさで逆向きなら$\mathbf{A}=-\mathbf{B}$,逆向きで大きさが違えば$\mathbf{A}=-c\mathbf{B}, \mathrm{c}>0$です．さて，$\boldsymbol{a}=-\omega^2\boldsymbol{r}$という式で，$\omega^2$が正なので，加速度ベクトル$\boldsymbol{a}$と位置ベクトル$\boldsymbol{r}$はちょうど逆向き（平行かつ逆向き，反平行ともいう）になることが分かります．注：この問でも，円運動の中心が原点となっています．

Q. 等角速度円運動で，加速度ベクトル$\boldsymbol{a}$が位置ベクトル$\boldsymbol{r}$はちょうど逆向きとなることを直感的に説明する方法はありませんか？

A. 微小な時間の間に速度ベクトルがどのように変化するかを観察すると分かります．速度ベクトルは必ず接線方向を向いているのでその向きが刻々と変化します．一方，速度ベクトルの大きさは，等角速度すなわち速さが一定なので，変わりません．こうして，速度ベクトルは向きだけが変わります．微小な時間が経過する前後の速度ベクトルを，始点をそろえて比較します．そうすると，速度ベクトルの変化分は，ほとんどもとの速度ベクトルと直交します．したがって，加速度ベクトル（速度ベクトルの時間的な変化の割合い）は速度ベクトルと直交し，しかも円の内側を向きます．速度ベクトルと位置ベクトルが直交しているので，加速度ベクトルが位置ベクトルと反平行であることが分かります．この事情を直感的に示すのがホドグラフです．

例題 3-6

Q. 計算の過程が分かりませんでした．

A. 教科書の記述を追跡しましょう．太字はベクトル，並字はスカラーであることに注意してください．

原点 O を中心とする半径rの円周上の点 P の位置ベクトル$\mathbf{r}$は，x軸から OP までの角度をφとすると

$$\mathbf{r}=r\cos\varphi\ \boldsymbol{e_x}+\ r\sin\varphi\ \boldsymbol{e_y}$$

です．もし角速度が一定値ωの運動なら$\varphi=\varphi(t)=\omega t$ですが，この問では$\varphi(t)$がもっと複雑な t の関数となる場合を想定します：

$$\mathbf{r}=r\cos\varphi(t)\ \boldsymbol{e_x}+\ r\sin\varphi(t)\ \boldsymbol{e_y} \qquad (3.60)$$

速度ベクトル$\mathbf{v}$の定義は，位置ベクトルの時間微分ですから，$\mathbf{v}=\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{dt}}$です．そこで(3.60)の両辺を時間で微分します．右辺のに現れる円の半径r(位置ベクトルの長さでもある)は，原点を中心とする円なので，時間的に変化しません．また x 軸と y 軸の方向も一定なので$\boldsymbol{e_x}$と$\boldsymbol{e_y}$も変化しません．時間的に変化するのは OP の x 軸ととなす角$\varphi(t)$だけです．したがって，たとえば(3.60)右辺の第一項では，$\cos\varphi(t)$だけが時間の関数になります．

そこで，合成関数の微分法を用いて

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r\cos\varphi(t)\ \boldsymbol{e_x}=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cos\varphi(t)\right)\times\ r\boldsymbol{e_x}=\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{dt}}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\cos\varphi(t)\right)\times\ r\boldsymbol{e_x}=\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{dt}}\cdot(-\sin\varphi(t))\right)\times\ r\boldsymbol{e_x}=(-r\sin\varphi(t)\ \boldsymbol{e_x})\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{dt}}$$

となります．第二項も同じように計算すると

$$\mathbf{v}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\mathbf{r}=\left(-r\sin\varphi(t)\ \boldsymbol{e_x}+r\cos\varphi(t)\,\boldsymbol{e_y}\right)\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{dt}} \qquad (3.61)$$

を得ます．

加速度ベクトルは，速度ベクトルの時間微分と定義されますから, (3.61)をもう一度 t で微分します．もし等角速度すなわち$\varphi(t)=\omega t$なら$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{dt}}=\omega=$一定ですが，等角速度でないときは$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{dt}}$も時間の関数になります．

まず(3.61)の右辺の　$-r\times\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{dt}}\times\sin\varphi(t)\ \boldsymbol{e_x}$　という項の微分をしましょう．$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{dt}}\times\sin\varphi(t)$の微分は（関数の積の微分法により）

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{dt}}\times\sin\varphi(t)\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{dt}}\times\sin\varphi(t)+\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{dt}}\times\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\sin\varphi(t)=\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{dt}^2}\times\sin\varphi(t)+\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{dt}}\times\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{dt}}\cos\varphi(t)$$

となります．よって

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(-r\times\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{dt}}\times\sin\varphi(t)\ \boldsymbol{e_x}\right)=-r\times\left(\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{dt}^2}\times\sin\varphi(t)+\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{dt}}\times\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{dt}}\cos\varphi(t)\right)\boldsymbol{e_x}$$

$$=-\left(\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{dt}^2}\times r\sin\varphi(t)+\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{dt}}\right)^{\mathbf{2}} r\cos\varphi(t)\right)\boldsymbol{e_x}$$

同様に

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(r\times\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{dt}}\times\cos\varphi(t)\ \boldsymbol{e_y}\right)=r\times\left(\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{dt}^2}\times\cos\varphi(t)-\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{dt}}\times\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{dt}}\sin\ \varphi(t)\right)\boldsymbol{e_y}$$

$$=\left(\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{dt}^2}\times r\cos\ \varphi(t)-\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{dt}}\right)^{\mathbf{2}} r\sin\varphi(t)\right)\boldsymbol{e_y}$$

これらの和をつくり，位置ベクトル$\mathbf{r}=r\cos\varphi\,\boldsymbol{e_x}+r\sin\varphi\,\boldsymbol{e_y}$が見えるようにまとめると

$$\mathbf{a}=\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{dt}}=-\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{dt}}\right)^{\mathbf{2}}\times\left(r\cos\varphi(t)\,\boldsymbol{e_x}+r\sin\varphi(t)\,\boldsymbol{e_y}\right)+\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{dt}^2}\times\left(-r\sin\varphi(t)\boldsymbol{e_x}+r\cos\ \varphi(t)\boldsymbol{e_y}\right)$$

$$=-\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{dt}}\right)^{\mathbf{2}}\times\mathbf{r}+\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{dt}^2}\times\left(-r\sin\varphi(t)\boldsymbol{e_x}+r\cos\ \varphi(t)\boldsymbol{e_y}\right)\qquad(3.62)$$

となります．

もし等角速度であれば，$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{dt}^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\omega=0$なので右辺第二項は 0 となり，第一項に$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{dt}}=\omega$を代入すれば既知の事実$\mathbf{a}=-\omega^2\mathbf{r}$を得ます．注意：$\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{dt}}\right)^{\mathbf{2}}$は角速度の２乗．

等角速度でないときは$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{dt}^2}\neq 0$となり，第二項も（時には 0 になることがあっても，いつも 0 であるといわけにはいかない＝常には 0 でない）値をもつようになります．注意：$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{dt}^2}$は「角加速度」ともいうべき量．

また，第二項は$\mathbf{r}=r\cos\varphi\,\boldsymbol{e_x}+r\sin\varphi\,\boldsymbol{e_y}$のスカラー倍ではありません．（正確にいうと，$\mathbf{r}$と直交．すなわち円の接線方向を向くベクトル）です．$\mathbf{r}$と直交する成分をもつ加速度は，もはや$\mathbf{r}$と平行にはなりません（数学的には「$\mathbf{r}$に比例しない」といえます）．

例題 3-7
次の講義時間中に解きます