物体を地上から速さ V，水平とのなす角 θ で投げる．$V=$ 一定とすると，物体が決して到達できない領域はどこか．また点(ℓ,h)に到達する射出角 θ を求めよ．

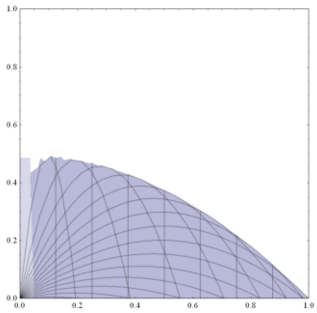
運動方程式：　$m\frac{d^2x}{dt^2}=0$，$m\frac{d^2y}{dt^2}=-mg$

初期条件：　$x(0)=0$，$y(0)$，　$v_x(0)=V\cos\theta$，$v_y(0)=V\sin\theta$

位置：$x(t)=(V\cos\theta)t$，　$y(t)=-\frac{1}{2}gt^2+(V\sin\theta)\,t$

軌道：$y=-\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{V\cos\theta}\right)^2+(V\sin\theta)\left(\frac{x}{V\cos\theta}\right)=-\frac{1}{2}\frac{g}{V^2\cos^2\theta}\,x^2+(\tan\theta)x$

条件：$h=-\frac{1}{2}\frac{g}{V^2\cos^2\theta}\,\ell^2+(\tan\theta)\ell$



・包絡線 $\mathrm{y}=-\frac{g}{2V^2}x^2+\frac{V^2}{2g}$ の外側には届かない

位置xで包絡線に接する点を通過する放物線のパラメータ θ ：

$$\frac{\partial \mathrm{y}}{\partial\theta}=0\ \rightarrow -\frac{gx^2\tan\theta}{V^2\cos^2\theta}+\frac{x}{\cos^2\theta}=0\rightarrow -\frac{g\tan\theta}{V^2}x^2+x=0$$

その位置における高さ:軌道の式に$\tan\theta=\frac{V^2}{gx}$を代入し$\mathrm{y}=-\frac{g\left(1+\frac{V^4}{g^2x^2}\right)x^2}{2V^2}+\frac{V^2}{gx}x=-\frac{gx^2}{2V^2}+\frac{V^2}{2g}$

・最大射程は$\mathrm{y}=h=0$のとき：$\mathrm{y}=-\frac{gx^2}{2V^2}+\frac{V^2}{2g}=0\ \rightarrow\ x=\ell=\frac{V^2}{g}$

・$h=-\frac{1}{2}\frac{g}{V^2\cos^2\theta}\,\ell^2+(\tan\theta)\ell$　を解く

$$h=-\frac{1}{2}\frac{g}{V^2}\,\ell^2(\tan^2\theta+1)+(\tan\theta)\ell\ \rightarrow\ \frac{\mathrm{h}}{-\frac{1}{2}\frac{g}{V^2}\,\ell^2}=\tan^2\theta+1+\frac{\ell}{-\frac{1}{2}\frac{g}{V^2}\,\ell^2}\tan\theta$$

$$\tan^2\theta-\frac{2}{\frac{g}{V^2}\,\ell}\tan\theta+\left(\frac{2\frac{h}{\ell}}{\frac{g}{V^2}\,\ell}+1\right)=0\ \rightarrow\ \tan\theta=\left(\frac{1}{\frac{g}{V^2}\,\ell}\right)\pm\sqrt{\left(\frac{1}{\frac{g}{V^2}\,\ell}\right)^2-\left(\frac{2\frac{h}{\ell}}{\frac{g}{V^2}\,\ell}+1\right)}$$

$$=\frac{V^2}{g\ell}\pm\sqrt{\left(\frac{V^2}{g\ell}\right)^2-2\frac{h}{\ell}\left(\frac{V^2}{g\ell}\right)-1}$$

たとえば，最長距離$(\ell,h)=\left(\frac{V^2}{g},0\right)$を実現するのは

$$\tan\theta = \frac{V^2}{g\frac{V^2}{g}} \pm \sqrt{\left(\frac{V^2}{g\frac{V^2}{g}}\right)^2 - 2\frac{0}{\ell}\left(\frac{V^2}{g\ell}\right) - 1} = 1 \pm \sqrt{1 - 0 - 1} = 1$$，よって$\theta = 45°$