例題 7.4

Q. ネルギーと位置エネルギーの一周期についての平均が$<\mathrm{k}>=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{1}{2}mv^2dt$，$<\mathrm{v}>=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{1}{2}kx^2dt$となるのは何故ですか？

A. この質問には「1周期についての平均」ではなく「1周期についての平均時間が」と書いてあったので，もしかすると単なる不注意による読み間違えかもしれないですね．

質問を脚色して「1周期についての平均」としないと文章の意味がとれませんから，そうだとして，時間的な平均という概念の説明をしましょう．たとえば，雨が降ったり止んだりするとき，雨の強さを12時間で平均するときは，12時間内の雨量を12時間で割ります.これとまったく同じことで,時間的に変動する$\frac{1}{2}mv^2$という量のT内の平均値は,$\frac{1}{2}mv^2$をT 内で積算（時間による積分）してTで割ることになります．式で書くと$<\mathrm{K}>=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{1}{2}mv^2dt$です.

質問は「なぜか」となっていますが，答えは「それが平均値の定義だから」です.

問題 7.1 (2)

Q. 問題文に何故加速度一定と書いてあるのですか？加速度が変わると摩擦力も変わるのですか？　7.2 (2)では，加速度一定と書いていませんが，どうしてですか？

A. 問題文には明示されていませんが，道は真っ直ぐで水平だとします．また，ブレーキを踏んいる間は (クラッチが切られて) エンジンからの動力が車輪に供給されないとします.そうすると，この自動車の運動状態の変化を支配する力は路面から受ける摩擦力だけを考慮すればよいことになります :「自動車の加速度」×「自動車の質量」＝「摩擦力」．すなわち，加速度が一定ということと摩擦力が一定ということは同じ内容となります．問題文は「加速度が一定とすれば摩擦力も一定だが，その大きさはどれだけか」という意味です.

問 7.2 の空気抵抗の大きさは速度により変化します．したがって，この物体の落下は加速度が時間的に変動します．教科書§5.2, p.79 あたりを復習してください.

問題 7.1 (3)

Q. 速度/加速度= 時間 となるんですか？　$\mathrm{V}=V_0-at$とかで求めるのでは？

A. 加速度の定義は

[加速度]＝[速度の変化]/[変化に要した時間]

ですが，式を変形すると

[速度の変化] /[加速度]＝[変化に要した時間]

となります．速度の変化を$\mathrm{V}-\mathrm{V}_0$，その変化に要した時間が t であれば，加速度は

$$\frac{\mathrm{V}-\mathrm{V}_0}{a}=t$$

です.

問題 7.4 と 7.5

Q. 問題の意味，要求されていること，考え方，解き方も分かりませんでした．

A.授業前の予習としての問題ですから，初見で分からないのがあたりまえです．そのときの対処をどうするかで道が分かれます．教科書の本文や例題に似たものがあるかを探し，その付近を注意深く読んで，分からないことが何なのかを探る必要があります．そのうえで，いつものとおり「具体的な質問」をつくってください．

【位置エネルギーから力を求める】

位置エネルギーが座標の関数$V(x)$として既知のとき，その位置エネルギーに対応する力はやはり位置の関数$F(x)$です： $F(x) = -\frac{d}{dx}V(x)$により計算で求めることが出来ます．

【位置エネルギーから運動可能領域を求める】

質量mの物体が位置xにあるとき，位置エネルギーが$V(x)$ならば，その速度をvとすると

$$\frac{1}{2}mv^2 + V(x) = E = \text{時間的に変化しない値}$$

がなりたちます．これを移項して$\frac{1}{2}mv^2$が負にならないという条件を不等式で表すと

$$E - V(x) \geq 0$$

言い換えると，この質点が運動しているときいつでも$E \geq V(x)$が成り立つはずです．さらに言い換えると，この不等式が成り立たない場所は物体が入っていけないということになります．運動可能領域とは$E - V(x) \geq 0$が成り立つ（すなわち，力学的エネルギーの値が E のときに物体が入っていける）範囲です．$V(x)$が同じであっても，E の値が異なれば，運動可能領域も異なり，場合によっては運動可能領域が存在しない（運動が実現しない）こともあります．運動可能領域を見つけるには不等式$E - V(x) \geq 0$を解きます．

Q. 各点での力とは何ですか？

A. たとえば「質量 m の物体に作用する重力の大きさは，地上付近では高さによらず，どの点でも mg である」と言えば，この「点」は物体の位置をさします．それと同じことで，物体が x 軸上でどのような力を受けるかを数学的に表すときは関数 F(x)になります．「各点での力」とは「x 軸上の各点で物体が受ける力」という意味です．

Q. 運動可能領域とは何ですか．

A. 物体が運動できる範囲のことです．たとえば，一端を固定したバネの他端に結ばれた物体の運動の範囲は，その振幅の内側です．自然長の位置が原点で，振幅がaのとき，運動可能領域は区間$[-a, a]$です．

位置エネルギーから導かれる力（保存力）では，狭義のエネルギー保存則

$$\frac{1}{2}mv^2 + V(x) = E$$

の右辺の E が時間的に一定（初期条件により決まった値を保持する）です．$\frac{1}{2}mv^2$は，質量（正）と速度の 2 乗（非負）の積なので非負．これより，$E - V(x) \geq 0$の範囲しか運動が起

きないのです．たとえば，バネ定数がkのバネで質量 m の物体を振動させるとき，自然長での位置を原点にとると，位置エネルギーは$V(x)=\frac{1}{2}kx^2$です．初期条件を「aだけのばして静かに（$v(0)=0$で」放す」とすると，

$$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}m0^2+V(a)=\frac{1}{2}ka^2=E$$

したがって

$$\frac{1}{2}ka^2-\frac{1}{2}kx^2\left(=\frac{1}{2}nv^2\right)\geq 0$$

を満たすxの範囲で運動が起きることが分かります.

Q. 7.5(2)の解き方を説明してください.

A. WebPage の問題詳解には次のように説明してあります.

問題設定：

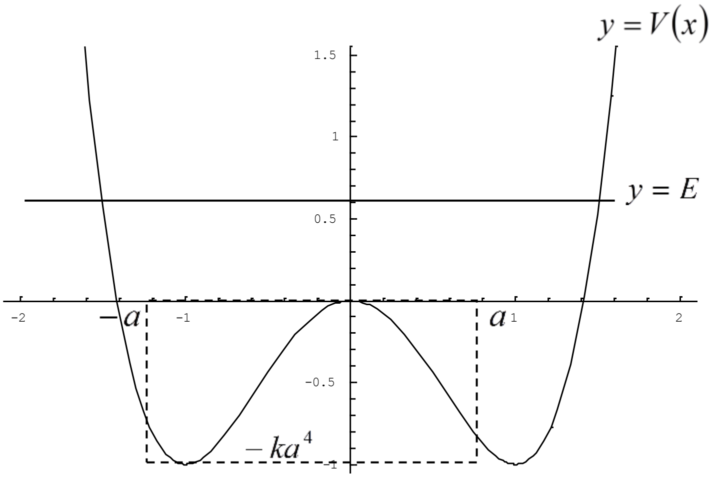
力学的エネルギーは

$$E=\frac{1}{2}mv^2+V(x)=\frac{1}{2}mv^2+k\left(x^4-2a^2x^2\right)$$

よって

$$\frac{1}{2}mv^2=E-k\left(x^4-2a^2x^2\right)\geq 0$$

という不等式が運動可能領域を求める条件．それを詳細に言うと，①下図の位置エネルギーのグラフ $y=V(x)$ と水平線 $y=E$ が交わる必要がある．そのとき②水平線 $y=E$ が $y=V(x)$ の上側に来る x の範囲を求める．



グラフの観察：

$y=V(x)$ の極値（$\frac{d}{dx}V=-F=0$ を満たす点）は $x=\pm a$， $x=0$ の三点であり，

$V(\pm a)=k(a^4-2a^2\times a^2)=-ka^4$ が極小かつ最小，$V(0)=0$ が極大.

以上を念頭にグラフを観察すると

場合分け１：

$E>0$：両グラフの交点は２個，２つの交点を両端とする区間で $E-k(x^4-2a^2x^2)\geq 0$ が成り立つ．交点は x^2 の２次方程式式

$$(x^2)^2-2a^2(x^2)-\frac{E}{k}=0$$

を形式的に（＝解の公式に代入する形で）解くと

$$(x^2)=a^2\pm\sqrt{a^4+\frac{E}{k}} \qquad (@)$$

であるが，$0<E$ なので $a^2<\sqrt{a^4+\frac{E}{k}}$ ．$x^2>0$ だから複合の正だけが意味がある．

よって，

$$x^2=a^2+\sqrt{a^4+\frac{E}{k}} \qquad \text{よって} \qquad x=\pm\sqrt{a^2+\sqrt{a^4+\frac{E}{k}}}$$

すなわち，運動可能領域は閉区間 $\left[-\sqrt{a^2+\sqrt{a^4+\frac{E}{k}}},\ \sqrt{a^2+\sqrt{a^4+\frac{E}{k}}}\right]$ である．

場合分け２：

$0\geq E\geq -ka^4$：等号のときを除いて両グラフの交点は４個．$x<0$ の側の２交点を両端とする区間，および $x>0$ の側の２交点とする区間が，それぞれ運動可能領域となる，このＥの範囲では（@）の右辺は複合のいずれについても正である．４交点を小さいものから順番にならべると

$$-\sqrt{a^2+\sqrt{a^4+\frac{E}{k}}},\ -\sqrt{a^2-\sqrt{a^4+\frac{E}{k}}},\ \sqrt{a^2-\sqrt{a^4+\frac{E}{k}}},\ \sqrt{a^2+\sqrt{a^4+\frac{E}{k}}}$$

であり，運動可能領域は

$$\left[-\sqrt{a^2+\sqrt{a^4+\frac{E}{k}}},\ -\sqrt{a^2-\sqrt{a^4+\frac{E}{k}}}\ \right]$$

および

$$\left[\sqrt{a^2-\sqrt{a^4+\frac{E}{k}}},\ \sqrt{a^2+\sqrt{a^4+\frac{E}{k}}}\right]$$

の２つの閉区間である.