【数学的帰納法】

〇「帰納」という言葉の周辺

この証明の方法は，どの自然数にもその隣に“次に大きな自然数”があり，両者の間に自然数がない，という事実に根ざしている（一方，大きさが違う２つの分数（有理数）の間には必ず別の有理数がある)．「次=ひとつ隣の大きいもの」を作る関数 F（もしかするとプログラム）があれば，2=F(1)，3=F(2),....と，次々に自然数を作り出すことができる．同じルールで，次々に（芋づる式に）ものを作っていくのを「帰納的な作り方」と言う．与えられた数 N が自然数かどうかは，N=F(F(F(...F(1)...)))となっていることを確認できればよい．このあたりの考え方は,「単語」から「文」を生成するなどの基本概念だから，コンピュータ科学には重要である．

〇数学的帰納法

「ある主張が n ＝ 1 で成り立つ．どんな自然数 n についても，n で成り立つと仮定すれば n+1 でも成り立つ」となれば，n=1 で OK だから n=2=1+1 で OK，n =3 =2+1 で OK,・・・どんな n でも OK というのがこの論証の骨子.

同じ内容を理系の大学生らしく表現すると：

帰納的に定義された集合（この問の場合は自然数の集まり）の任意の元（任意の自然数 n）について，ある命題（n を変数あるいは引数として含む等式や不等式）が成り立つことを証明する方法が数学的帰納法である．それは，命題を P(n)と書くと

(1) P(1)が成り立つことを証明する
(2) どんな n についても, P(n)が成り立つことを仮定し, その仮定を使って P(n+1)が成り立つことを証明する.

の二段階からなる.

P(1)が成り立つので，(2)を用いて P(2)が成り立つことが保証され，そうすると P(3)が成り立つことが保証され・・・となる．あるいは，任意のＮについて，P(N-1)が成り立つなら P(N)も成り立っているはず，P(N-2)が成り立っているなら P(N-1)が成り立つから P(N)も成り立っているはず, . . . P(1)が成り立っているのだから結局 P(N)が成り立っている.

証明の第二段階(2)を “P(n)から P(n+1)を作り出す関数をつくる行為“とみなすと，まさに

帰納的に任意の n についての P(n)を作る作業がこの証明である.

数学的帰納法の拡張版としては

・n が 1 ではない数から帰納法を開始する

・とびとびの自然数（たとえば偶数だけ）について帰納法を適用する

・フィボナッチ数列の問題のように，連続する複数の命題から次の命題を導く

などがある．なお，自然数 n について，P(n+1)から P(n)を証明し(n が減る方向！)，たとえば P(100)が成り立つことを言っておけば， n=1～100 について P(n)が成り立つことが証明できるわけだが，これだと任意の n について証明できるわけではない.

**問 1-2{3} 自然数$\boldsymbol{n \geq 2}$に対して，$\boldsymbol{h > 0}$ならば，$\boldsymbol{(1+h)^n > 1 + nh}$であることを証明せよ.**

数学的帰納法によりこの証明を行うには：

(1) $n = 2$について，命題「$h > 0$ならば，$(1+h)^n > 1 + nh$が成り立つ」ことを証明する.
(2) どの$n(\geq 2)$についても，「$(1+h)^n > 1 + nh$が成り立つなら$(1+h)^{n+1} > 1 + (n+1)h$が成り立つ」ことを証明する.

計算の過程を詳細に示すと

① n+1 のときの左辺を書き，その式中に n のときの式を見つけてあぶり出す：

$$(1+h)^{n+1} = (1+h)^n \times (1+h)$$

② n のときに成り立つと仮定した不等式を使って変形する：

$$(1+h)^n \times (1+h) > (1+nh) \times (1+h) = 1 + nh + h + nh^2 = 1 + (n+1)h + nh^2$$

③ 最終辺の最終項$n^2h$は正だから，切り捨て，さらに不等式をつくる：

$$1 + (n+1)h + nh^2 > 1 + (n+1)h$$

④ したがって

$$(1+h)^{n+1} > 1 + (n+1)h$$

を得る.

別解としては

数学的帰納法の仮定から

$(1+h)^n > 1+nh > 1$(二番目の不等号は $\mathrm{h}>0$ だから成り立つ)$\cdots$A

また

$$(1+h) > 1+\frac{h}{(1+nh)} > 1 \cdots \mathrm{B}$$

よってAとBの対応する辺を掛け合わせると

$(1+h)^{n+1} > 1+(n+1)h > 1$　（二番目の不等号は，書いただけ）

としてもよい.

数学的帰納法によらずに証明することもできる：

二項定理を用いると

$$(1+h)^n = \sum_{\mathrm{r}=1}^{n} \frac{n!}{r!\,(n-r)!} h^r = 1+nh+\sum_{\mathrm{r}=2}^{n} \frac{n!}{r!\,(n-r)!} h^r > 1+nh$$

不等号の成立は，$\sum_{\mathrm{r}=2}^{n} \frac{n!}{r!(n-r)!} h^r$ の各項 $\frac{n!}{r!(n-r)!} h^r$ が正だからである.

余談：この問はあとで数列 $\{r^n\}$ の極限値を調べるときに活躍する.

**ほかの例題**

| |
|---|
| **１．　４以上の自然数 $\boldsymbol{n}$ について不等式 $\boldsymbol{2^n > 3n+1}$ を数学的帰納法で証明せよ.** |

①$n=4$ のとき $2^4 = 16 > 3\cdot 4+1 = 13$ が成り立つ.

②つぎに

$$2^{\mathrm{n}+1} = 2^n \cdot 2$$

と変形し，この右辺に対して，成立すると仮定する不等式を適用すると

$$2^n \cdot 2 > (3n+1) \cdot 2$$

右辺から$3(n+1)+1$の形を抽出したいので，そのように変形を心がけると

$$(3n+1) \cdot 2 = \{3(n+1)+1\} + \{3n-2\}$$

右辺第二項は$n > 4$のとき明らかに$(3\mathrm{n}-2) > 0$だから, 右辺から正の量を引き去ったためにできる不等式が

$$\{3(n+1)+1\} + \{3n-2\} > 3(n+1)+1$$

総合すると

$$2^{\mathrm{n}+1} > 3(n+1)+1$$

以上で$2^n > 3n+1 \to 2^{\mathrm{n}+1} > 3(n+1)+1$を証明した．題意は示された.

**２．任意の自然数$\boldsymbol{n}$に対して$\boldsymbol{a_n} = \left(\mathbf{1}+\sqrt{\mathbf{3}}\right)^{\boldsymbol{n}} + \left(\mathbf{1}-\sqrt{\mathbf{3}}\right)^{\boldsymbol{n}}$が整数になることを証明せよ.**

**（ヒント：$\boldsymbol{\alpha} \equiv \left(\mathbf{1}+\sqrt{\mathbf{3}}\right), \boldsymbol{\beta} \equiv (\mathbf{1}-\sqrt{\mathbf{3}}) \rightarrow \boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta} = \mathbf{2}, \boldsymbol{\alpha\beta} = -\mathbf{2}$）**

証明の素材を挙げておく：

$$a_1 = \alpha + \beta = 2, \qquad a_2 = (1+3) \cdot 2 = 8$$

$$\begin{aligned} a_{k+1} = \alpha^{k+1} + \beta^{k+1} &= (\alpha+\beta)(\alpha^k+\beta^k) - (\alpha\beta^k + \beta\alpha^k) \\ &= (\alpha+\beta)(\alpha^k+\beta^k) - \alpha\beta(\alpha^{k-1}+\beta^{k-1}) = 2(a_k + a_{k-1}) \end{aligned}$$