[3]　$_{n+2} = \ _{n+1} + \ _{n}$，$_{1} = 1$，$_{2} = 1$で定義される数列$\{a_n\}$をフィボナッチ(L. Fibonacci, 1174?-1250?) 数列という.

(1)　最初の 7 項を書け.

(2)　一般項は$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n), \alpha = (1+\sqrt{5})/2, \beta = (1-\sqrt{5})/2$で与えられることを示せ.

注釈：

- “1174?-1250?”はフィボナッチさんの生没年号.
- 与えられた漸化式から一般項を求めるために数学的帰納法は使えない．一般項が題意のように推定されるとき，それを証明する手段として使える．3 項間漸化式なので，a_1とa_2からa_3が決まり，a_2とa_3からa_4が決まり…と帰納的に項が決まる．
- 「$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n), \alpha = (1+\sqrt{5})/2, \beta = (1-\sqrt{5})/2$」が証明すべき命題である。
  - (1)　$n = 1$および$n = 2$のとき命題が成り立つことを証明する
  - (2)　$n = k-1,\ k$のとき命題が成り立つと仮定して $n = k+1$のときに成り立つことを証明する（$n = k+1, k \to n = k+2$も、kの値を 1 以上とすれば同じこと）
- なぜ一般項がそのように書けるのか、なぜα、βの値がそういう数になるのかは、別の（興味深い）話であり、数学的帰納法で証明する際には関係ない。

巻末略解を補間する：

$\mathrm{n} = 1{,}2$のときは明らか（確かに！）。

$n = k$まで正しいとする。（この箇所を“不要なほど”丁寧に言うと）

「どんな$k(\geq 2)$についても

$$a_{k-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{k-1} - \beta^{k-1})、a_k = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^k - \beta^k)$$

が成り立つと仮定する。」そして「この仮定と、数列の漸化式および,$\alpha = (1+\sqrt{5})/2, \beta = (1-\sqrt{5})/2$を用いて

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^k - \beta^k)$$

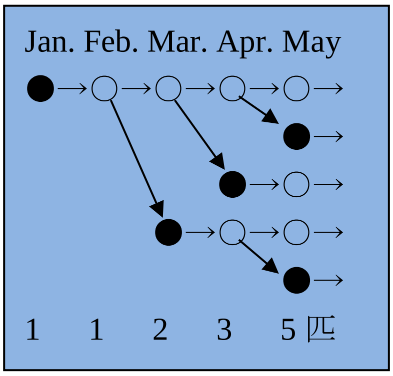
が成り立つことを証明する。」あとは漸化式の右辺に$a_{k-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{k-1} - \beta^{k-1})$、$a_k = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^k - \beta^k)$を代入して計算した値が$\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^k - \beta^k)$となることを示し、それゆえ$a_k = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^k - \beta^k)$であることを言って、証明が終わる。

フィボナッチ数列の起源：

・娘兎（●）は生まれると 1 月で母兎（○）となる

・母兎は 1 月に 1 匹の娘兎を生む（ ↘ ）

・最初 1 匹の娘兎がいると 1 年では何匹の雌兎がいる？



第 n ヶ月における「母」の数 M_n

同　　　「娘」の数 D_n

同　　　「雌」の数 $T_n = M_n + D_n$

初項　$D_1 = 1,\quad M_1 = 0$

漸化式　$D_n = M_{n-1},\quad M_n = M_{n-1} + D_{n-1}$　（現象を数式化）

第二式から D を消去すると

$$M_n = M_{n-1} + M_{n-2},\quad M_1 = 0,\quad M_2 = 1$$

あるいは教科書の問題にある”$\boldsymbol{a_{n+2}} = {}_{\boldsymbol{n+1}} + {}_{\boldsymbol{n}},\quad {}_{\boldsymbol{1}} = \mathbf{1},\quad {}_{\boldsymbol{2}} = \mathbf{1}$"の形にするには、母と娘を合わせた数に注目し

$$T_n \equiv M_n + D_n = (M_{n-1} + D_{n-1}) + M_{n-1} = (M_{n-1} + D_{n-1}) + (M_{n-2} + D_{n-2})$$
$$= T_{n-1} + T_{n-2},\quad T_1 = 1,\quad T_2 = 1$$

となる。実際に数を代入して、1,　1,　1+1=2,　1+2=3,　2+3=5,　3+5=8,…

Q. 一般項を$\boldsymbol{a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)}$,　$\boldsymbol{\alpha, \beta = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}}$と，天下りに与えられたのですが，なぜ，そうする気持ちになるのでしょうか.

A. この数列は漸化式 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$という 3 項の関係で定義されています．漸化式の両辺をa_nでわり，隣合う項の比を

$$r_n = a_{n+1}/a_n$$

と書くと

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{n+1}}{a_n} + 1 \ \rightarrow\ r_{n+1} r_n = r_n + 1$$

さらに，この比がrに収束するとき

$$r^2 = r + 1 \rightarrow r = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

$$\alpha \equiv \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \beta \equiv \frac{1-\sqrt{5}}{2},\ (\alpha+\beta) = 1, \alpha\beta = -1, \frac{1+\alpha}{\alpha^2} = 1, \frac{1+\beta}{\beta^2} = 1$$

となります．こうして，α，βを用いてもとの漸化式を書き換える気持ちになります：

$$a_{n+2} = 1a_{n+1} + 1a_n = (\alpha+\beta)a_{n+1} - \alpha\beta a_n$$

移項して整理し，初めの２項までたどっていくと

$$\begin{cases} (a_{n+2} - \alpha a_{n+1}) = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n) \rightarrow (a_{n+2} - \alpha a_{n+1}) = \beta^n(a_2 - \alpha a_1) \\ (a_{n+2} - \beta a_{n+1}) = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n) \rightarrow (a_{n+2} - \beta a_{n+1}) = \alpha^n(a_2 - \beta a_1) \end{cases}$$

という 2 つの式を得ます．２式を引き算して$a_2 = a_1 = 1$を代入すると

$$(\alpha-\beta)a_{n+1} = (\alpha^n - \beta^n)a_2 + (\alpha\beta^n - \beta\alpha^n)a_1$$
$$\rightarrow (\alpha-\beta)a_n = (\alpha^{n-1} - \beta^{n-1})a_2 + (\alpha\beta^{n-1} - \beta\alpha^{n-1})a_1$$

$$\rightarrow \sqrt{5}a_n = (\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}) + (\alpha\beta^{n-1} - \beta\alpha^{n-1}) = (\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}) - (\beta^{n-2} - \alpha^{n-2})$$

$$= (\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2}) - (\beta^{n-1} + \beta^{n-2}) = \alpha^n\left(\frac{1+\alpha}{\alpha^2}\right) - \beta^n\left(\frac{1+\beta}{\beta^2}\right) = \alpha^n - \beta^n$$

よって

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)$$

です.

三項間漸化式の一般解法（上に述べた内容の一般化）

三項漸化式　$a_{n+1} = pa_n + qa_{n-1},\ pq \neq 0,\quad a_1, a_2$: givenに対して

$$x^2 = px + q,\quad x = \alpha, \beta\ \ (\alpha + \beta = p,\quad \alpha\beta = -q)$$

をその特性方程式と呼ぶ。特性方程式の解を用いて一般項を求める方法は：

$$a_{n+1} = pa_n + qa_{n-1} = (\alpha + \beta)a_n - \alpha\beta a_{n-1}$$

$$\begin{cases}(a_{n+1} - \alpha a_n) = \beta(a_n - \alpha a_{n-1}) \rightarrow (a_{n+1} - \alpha a_n) = \beta^{n-1}(a_2 - \alpha a_1) \\ (a_{n+1} - \beta a_n) = \alpha(a_n - \beta a_{n-1}) \rightarrow (a_{n+1} - \beta a_n) = \alpha^{n-1}(a_2 - \beta a_1)\end{cases}$$

$\alpha \neq \beta \rightarrow$　辺々引き算して

$$(\beta - \alpha)a_n = (\beta^{n-1} - \alpha^{n-1})a_2 + (\beta\alpha^{n-1} - \alpha\beta^{n-1})a_1$$

$$a_n = \frac{(\beta^{n-1} - \alpha^{n-1})a_2 + (\beta\alpha^{n-1} - \alpha\beta^{n-1})a_1}{\beta - \alpha}$$

$\alpha = \beta \rightarrow$　$(a_{n+1} - \alpha a_n) = \alpha^{n-1}(a_2 - \alpha a_1)$の両辺を$\alpha^{n+1}$で割り

$$\left(\frac{a_{n+1}}{\alpha^{n+1}}\right) - \left(\frac{a_n}{\alpha^n}\right) = \frac{a_2}{\alpha^2} - \frac{a_1}{\alpha}$$

$\frac{a_n}{\alpha^n}$は公差：$\frac{a_2}{\alpha^2} - \frac{a_1}{\alpha}$,　初項：$\frac{a_1}{\alpha}$の等差数列なので

$$\frac{a_n}{\alpha^n} = \frac{a_1}{\alpha} + \left(\frac{a_2}{\alpha^2} - \frac{a_1}{\alpha}\right)(n-1)$$

$$a_n = \alpha^n\left\{\frac{a_1}{\alpha} + \left(\frac{a_2}{\alpha^2} - \frac{a_1}{\alpha}\right)(n-1)\right\} = (n-1)\alpha^{n-2}a_2 - (n-2)\alpha^{n-1}a_1$$

【リンク集】リンク切れがあるかもしれない・・・

●体験授業　黄金比１

黄金比. ピラミッド. ラクダの向こうに見えるのは何だかご存じですか。そう。有名なピラミッドです。 ... ピラミッドの黄金比. もう一つ、ピラミッドの側面にある三角形を図のようにすると、古来より、西洋の人々に最も愛されてきた「黄金長方形」とほぼ ...

http://www.seiai.ed.jp/topics/taiken/taiken.html

●フィボナッチ数を極める

このページでは、フィボナッチ数の持つ面白い性質と応用を紹介していきたいと思う。 （次のホームページ(１２さんすう３４数学５Ｇｏ！)では、フィボナッチ数の性質を、 楽しく、具体的に紹介しているの で、大いに参考になります。） ...

http://www004.upp.so-net.ne.jp/s_honma/fibonacci/fibonacci.htm

●おもしろ数学講座

みなさんは「黄金比」、「フィボナッチ数列」という言葉をお聞きになったことがある でしょうか？ ... さて、このように黄金比は芸術や建築の世界において多数見出される とともに、フィボナッチ数列と深い関わりがあるのです。 ...

http://www.cwo.zaq.ne.jp/bfaby300/math/fibona.html

●フィボナッチ数列

葉序には 1/2、1/3、2/5、3/8、5/13 などが知られ、多くの植物でフィボナッチ数列に従っているはずです。ちなみに枝の出る順番は左回りの株と右回りの株がほぼ１：１で出現します。これは遺伝的に決まっているのではなく、発生の時点で偶然に決まる事象です ...

http://www2.plala.or.jp/aki_ogawa/episode/fibon.html