問題４－６

1.定積分 $\int_2^6 \frac{dx}{x}$ を(a)n=4 の台形公式、(b)n=4 のシンプソンの公式によって計算し、正しい積分値と比べよ。

(※略解→

(a)n=4 の台形公式では

$$\int_2^6 \frac{dx}{x} = \frac{1}{2}[f(2)+2f(3)+2f(4)+2f(5)+f(6)] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{2}{4}+\frac{2}{5}+\frac{1}{6}\right) = \frac{67}{60} = 1.1167\cdots$$

(b)n=4 のシンプソンの公式では

$$\int_2^6 \frac{dx}{x} = \frac{1}{3}[f(2)+4f(3)+2f(4)+4f(5)+f(6)] = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{4}{3}+\frac{2}{4}+\frac{4}{5}+\frac{1}{6}\right) = \frac{11}{10} = 1.1$$

なお、定積分の値は

$$\int_2^6 \frac{dx}{x} = \log\frac{6}{2} = \log 3 = 1.0986\cdots$$

)

Q: シンプソンの公式の導出過程での近似の仕方があまりわかりません。

A: 講義で説明しなかったので、シンプソン公式の導き方を記します。シンプソンの公式を導くプロセスでの「近似のしかた」というのは「どんな関数のグラフであっても、放物線の断片をつなぎ合わせて表してしまう」ことです。「出てきた公式を積分の真の値と比較するとどれくらい良い近似になっているか」は別途議論する必要がありますが、省略。

シンプソンの公式

１．積分区間 [a,b] を n = 2m 個の小区間に分ける。小区間の幅は h である。

２．となりあう小区間をペアにする。

３．１つのペアに含まれる 2 個の小区間は、１個の区分点を共有している。

４．１つのペアは合計 3 個の区分点を含む。

５．中央の区分点を原点と考えると、3 個の区分点のｘ座標は
　-h，0，h
　である。

４．被積分関数がこれらの区分点で持つ値を

$$y_0, y_1, y_2$$

とする。

６．点 $(-h, y_0)(0, y_1)(h, y_2)$ を通過する放物線を描く。

７．放物線の式を

$$Ax^2 + Bx + c$$

とする。

８．この放物線の下側の面積を計算する。不定積分が

$$\frac{A}{3}x^3 + \frac{B}{2}x^2 + Cx$$

で、[-h,h]の区間だから、

$$面積 = \frac{A}{3}(h^3 - (-h^3)) + \frac{B}{2}(h^2 - (-h^2)) + C(h - (-h)) = \frac{2}{3}Ah^3 + 2Ch$$

９．面積 を y_0, y_1, y_2 で表す。

$$y_0 = A(-h)^2 + B(-h) + C = Ah^2 - Bh + C$$
$$y_1 = A(0)^2 + B(0) + C = C$$
$$y_2 = A(h)^2 + B(h) + C = Ah^2 + Bh + C$$

だから

$$y_1 = C$$
$$y_0 + y_2 = 2Ah^2 + 2C$$

よって

$$2Ah^2 = (y_0 + y_2 - 2y_1)$$
$$\frac{2}{3}Ah^3 = (y_0 + y_2 - 2y_1)\frac{h}{3}$$

$$面積 = \frac{2}{3}Ah^3 + 2Ch$$
$$= (y_0 + y_2 - 2y_1)\frac{h}{3} + 2y_1 h$$
$$= (y_0 + y_2 - 2y_1 + 6y_1)\frac{h}{3}$$
$$= (y_0 + 4y_1 + y_2)\frac{h}{3}$$

１０．以上の計算を各ペアで行い、和をとる。

今度は{y0,y1,y2}をグローバルに呼びなおさねばならない。

それらを関数値 $f(x_0)=f_0, f(x_1)=f_1, f(x_2)=f_2, f(x_3)=f_3 \cdots$ などと呼ぶ。

一番左のペアで面積は $\frac{h}{3}(f_0+4f_1+f_2)$

次のペアで $\frac{h}{3}(f_2+4f_3+f_4)$

その次では $\frac{h}{3}(f_4+4f_5+f_6)$

１１．放物線の断片をつなげたグラフの下の全面積は

$$\frac{h}{3}(f_0+4f_1+2f_2+4f_3+2f_4+\cdots+4f_{2m-1}+f_{2m})$$

これが、積分を近似するシンプソンの公式です

Q:　　問題文でわざわざ「電卓は必要ない」と書かれている理由が分かりませんでした。出てきた分数を通分してから割り算を解く、という形で解きましたが、ほかにもっと簡単に解ける方法が存在するのですか？

A:　　分数の和の計算法は、そんなものでしょう。いずれにしても、「11/10 を計算するには電卓はいらない」という意味なら納得します。

しかし、真の積分値の計算であらわれる「ln 3 を計算するのに電卓はいらない」という意味なら、ちょっと抵抗がありますね。まあ、やってできないことはないのですが。

実際、まず、69 ページのマクローリン展開の式で

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$$

に注目し、

$$\begin{aligned}\ln\left[\frac{1+x}{1-x}\right]&=\ln(1+x)-\ln(1-x)\\&=\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\cdots\right)-\left(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}-\cdots\right)\\&=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\right)\end{aligned}$$

$x=\frac{1}{2}$ を代入すると

$$\ln(3) = \ln\left[\frac{3/2}{1/2}\right]$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} + \frac{(1/2)^3}{3} + \frac{(1/2)^5}{5} + \cdots\right)$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{24} + \frac{1}{160} + \cdots\right)$$

$$= 2(0.5 + 0.0417 + 0.00625 + \cdots)$$

＝ 2 x 0.5479...

＝ 1.096..

ぐらいは手で計算できるのですが（少し値が違いますね）。