１．パラメータを用いて経路を指定する方法で解いてみる：

（１）

$$x(t)=t, y(t)=t, t:0\to 1$$

$$I=\int_C\left[x^2ydx+(x-1)dy\right]=\int_0^1\left(t^3+t-1\right)dt=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{4}$$

（２）

$$y(t)=t^2, x(t)=t, t:0\to 1$$

$$\int_C\left[x^2ydx+(x-1)dy\right]=\int_0^1 t^2t^2dt+\int_0^1(t-1)2tdt=\frac{1}{5}+\frac{2}{3}-1=-\frac{2}{15}$$

２．$\int_A^B \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\int_A^B Pdx+Qdy+Rdz$ 　（★）の被積分関数について、

一般に$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{r^3}\right)=x\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r^3}\right)=x\frac{\partial r}{\partial y}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r^3}\right)=x\frac{y}{r}\left(\frac{-3}{r^4}\right)=\frac{-3xy}{r^5}$だから

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-GmM\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{r^3}\right)=3GmM\frac{xy}{r^5},\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=-GmM\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{r^3}\right)=3GmM\frac{yx}{r^5}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial z}=-GmM\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{y}{r^3}\right)=3GmM\frac{yz}{r^5},\quad \frac{\partial R}{\partial y}=-GmM\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z}{r^3}\right)=3GmM\frac{zy}{r^5}$$

$$\frac{\partial R}{\partial x}=-GmM\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{z}{r^3}\right)=3GmM\frac{zx}{r^5},\quad \frac{\partial P}{\partial z}=-GmM\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x}{r^3}\right)=3GmM\frac{xz}{r^5}$$

より$\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}=0, \frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}=0, \frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}=0$となりポテンシャルが存在し、（★）は積分経路によらず始点と終点の位置だけで決まる。実際、教科書１１８ページ例１により$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r}$などとなるので

$$Pdx=-GmM\frac{x}{r^3}dx=-\frac{GmM}{r^2}\frac{x}{r}dx=-\frac{GmM}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}dx$$

$$-\frac{GmM}{r^2}=GmM\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$Pdx=GmM\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial r}{\partial x}dx=GmM\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)dx$$

よって

$$Pdx+Qdy+Rdz=d\left(\frac{GmM}{r}\right)$$

（★）は

$$\int_A^B \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\int_A^B Pdx+Qdy+Rdz=\left[\frac{GmM}{r}\right]_A^B=GmM\left(\frac{1}{r_\mathbf{B}}-\frac{1}{r_\mathbf{A}}\right)$$