4 章演習問題

[1]

(1) だれでもできそう。

(2) u = (2x + 5) とおいて置換積分。

(3) $\sqrt{x^2-2x^4}dx = x\sqrt{1-2x^2}dx = \sqrt{1-2x^2}d\left(\dfrac{x^2}{2}\right) = \sqrt{1-2u}\dfrac{du}{2}$

(4) $\dfrac{x^3-x+1}{x^2+1} = \dfrac{\left(x^3+x\right)-2x+1}{x^2+1} = x-\dfrac{2x}{x^2+1}+\dfrac{1}{x^2+1}$

(5)
$$t=\sqrt{1-x^2}, t^2 = 1-x^2, 2tdt = -2xdx,$$
$$\int\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \int\frac{dx}{xt} = \int\frac{xdx}{x^2t} = \int\frac{-tdt}{\left(1-t^2\right)t} = -\int\frac{dt}{(1-t)(1+t)},$$ 部分分数へ

私が持っている版では，対数の中の分母の平方根の中の符号が違う。

(6) $\dfrac{dx}{\tan x} = \dfrac{\cos xdx}{\sin x} = \dfrac{\dfrac{d(\sin x)}{dx}dx}{\sin x} = \dfrac{d\sin x}{\sin x},\quad u=\sin x,\ \dfrac{du}{u} = d\ln|u|$

(7)
$$u = x^2, v' = \sin x, v = -\cos x$$
$$\int x^2\sin xdx = -x^2\cos x + 2\int x\cos xdx$$
$$u = x, v' = \cos x, v = \sin x$$
$$\int x\cos xdx = x\sin x - \int\sin xdx = x\sin x + \cos x$$

(8)部分積分を 3 回

(9)倍角の公式により $\cos^2 x = \dfrac{1}{2}(1+\cos 2x)$

$$x = a\sin t, dx = a\cos t\, dt, \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = a\cos t\ \ a\cos t\ \ dt$$

(10) $$a^2\int \cos^2 t\, dt = a^2\left(\frac{1}{4}\sin 2t + \frac{1}{2}t + C\right) = a^2\left(\frac{1}{2}\sin t\cos t + \frac{1}{2}t + C\right)$$

$$= \frac{a^2}{2}\frac{x}{a}\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$$

[2]

(1) 略

(2) u = (x+3)の置換積分，ただし，この積分区間で被積分関数が負であることに注意。

(3) 略

(4) 半円の面積，もちろん[1](10)に上限下限を代入しても良い。

(5) $t = \sin x, dt = \cos x\,dx,\ z = 1 - t$と置換する。

(6) 略

(7)

$$\int_0^3 \frac{dx}{(3-x)^{3/2}} \equiv \lim_{b\to 3}\int_0^b (3-x)^{-3/2}dx = \lim_{b\to 3}\left[-\frac{(3-x)^{-(3/2)+1}}{-(3/2)+1}\right]_0^b = \lim_{b\to 3}\left[-\frac{(3-x)^{-1/2}}{-(1/2)}\right]_0^b = \lim_{b\to 3}\left[\frac{2}{\sqrt{3-x}}\right]_0^b = \infty$$

(8) $$\frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x dx}{e^{2x}+1}, t = e^x, dt = e^x dx \to \frac{dt}{t^2+1}, \int_0^\infty \frac{dt}{t^2+1} = \left[\arctan t\right]_0^\infty = \frac{\pi}{2} - 0$$

(9) x=1 の左右で分けて広義積分の形にし，極限値があるか調べる。

$$\int_{-\infty}^2 \frac{dx}{(1-x)^2} = \lim_{b\to 1}\int_{-\infty}^b \frac{dx}{(1-x)^2} + \lim_{a\to 1}\int_a^2 \frac{dx}{(1-x)^2}$$

$$\int_a^b \frac{dx}{(1-x)^2} = \left[\frac{1}{1-x}\right]_a^b = \frac{1}{1-b} - \frac{1}{1-a}$$

$$\lim_{b\to 1}\int_{-\infty}^b \frac{dx}{(1-x)^2} = \lim_{b\to 1}\left[\frac{1}{1-b} - 0\right] = +\infty \cdots (b<1)$$

$$\lim_{a\to 1}\int_a^2 \frac{dx}{(1-x)^2} = \lim_{a\to 1}\left[-1 - \frac{1}{1-a}\right] = +\infty \cdots (1<a)$$

よって正で無限大に発散する量を加えあわせる結果、与えられた式は無限大となり極限が存在しない。

(10) $$x = u^2, dx = 2udu, \frac{e^{-\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}} = \frac{e^{-u}}{u}2udu = 2e^{-u}du$$

[3]

参考としてガンマ関数の性質：

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=2\int_0^{\infty}e^{-u^2}du=\sqrt{\pi},\ \Gamma(1)=1$$

$x^n e^{-x}=e^{-x+n\ln x}$としたときの$f(x)=-x+n\ln x$は$x=n$で極大をとる

n!の値を，大きなｎのときに，近似的に求める方法：スターリングの公式

$$f(x)=-x+n\ln x=-n+n\ln n-\frac{t^2}{2n}$$のように変数変換する

$$x(t): x(-\infty)=0, x(0)=n, x(\infty)=\infty$$

$$\frac{dx}{dt}\left(-1+\frac{n}{x}\right)=-\frac{t}{n} \qquad \Rightarrow \qquad n(x-n)\frac{dx}{dt}=xt$$

$\Rightarrow$

$x(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+\cdots$を代入すると

$$n(-n+a_0+a_1t+a_2t^2+\cdots)(a_1+2a_2t+\cdots)=a_0t+a_1t^2+a_2t^3+\cdots$$

$$a_0=n$$

$$na_1^2=a_0 \Leftrightarrow a_1=1$$

$$n(2a_1a_2+a_2a_1)=a_1 \Leftrightarrow a_2=\frac{1}{3n}$$

$\Rightarrow$

$$n!=\Gamma(n+1)=\int_0^{\infty}x^ne^{-x}dx=\int_0^{\infty}e^{f(x)}dx=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-n+n\ln n-\frac{t^2}{2n}}\frac{dx}{dt}dt$$

$$=e^{-n}n^n\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2n}}\left(1+\frac{2}{3n}t+\cdots\right)dt=e^{-n}n^n\sqrt{2\pi n}\left(1+\cdots\right)$$

$$\approx e^{-n}n^n\sqrt{2\pi n}$$

（教科書の姉妹編,「微分積分演習）より）

[4]　　具体例として $I=\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+2}}$ を考えよう。教科書の表しかたに従うと、２つの変数 u,v を持つ関数 f があり $f(u,v)=\frac{1}{uv}, u=x, v=\sqrt{x^2-x+2}$ である。この積分を実行するのに

$$t=\sqrt{x^2-x+2}+x$$

とおけば

$$t-x=\sqrt{x^2-x+2}$$
$$\Rightarrow \quad t^2-2tx+x^2=x^2-x+2 \quad \Rightarrow \quad t^2-2xt=-x+2$$
$$\Rightarrow \quad 2tdt-2xdt-2tdx=-dx \quad \Rightarrow \quad (2t-2x)dt=(2t-1)dx$$
$$\Rightarrow \quad dx=2\frac{t-x}{2t-1}dt$$
$$t^2-2xt=-x+2$$
$$\Rightarrow \quad x(1-2t)=2-t^2 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{2-t^2}{1-2t}$$
$$dx=2\frac{t-x}{2t-1}dt=2\frac{t-\frac{2-t^2}{1-2t}}{2t-1}dt=\frac{2t(2t-1)+(2-t^2)}{\left(2t-1\right)^2}dt=2\frac{t(2t-1)+(2-t^2)}{\left(2t-1\right)^2}dt$$
$$=2\frac{t^2-t+2}{\left(2t-1\right)^2}dt$$

である。こうして、平方根の項は(t－x)に変わり、ｘは t の有理式に変わり、dx も t の有理式に dt をかけたものに変わった。実際、

$$I=\int\frac{\left(\frac{2(t^2-t+2)}{(2t-1)^2}\right)}{\left(\frac{t^2-2}{2t-1}\right)\left(t-\left(\frac{t^2-2}{2t-1}\right)\right)}dt=\int\frac{\left(\frac{2(t^2-t+2)}{(2t-1)^2}\right)}{\left(\frac{t^2-2}{2t-1}\right)\left(\frac{t\left(2t-1\right)}{2t-1}-\left(\frac{t^2-2}{2t-1}\right)\right)}dt$$
$$=\int\frac{2(t^2-t+2)}{(t^2-2)(t^2-t+2)}dt=2\int\frac{dt}{t^2-2}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)+C$$

となる。ここで t をｘにもどせば、積分が完成する。

一般的な場合は教科書の略解のように考える。その計算を追跡すると

$t = \sqrt{ax^2 + bx + c} + \sqrt{a}x$

$\Rightarrow \quad t - \sqrt{a}x = \sqrt{ax^2 + bx + c} \qquad \Rightarrow \quad t^2 - 2t \cdot \sqrt{a}x + ax^2 = ax^2 + bx + c$

$\Rightarrow \quad t^2 - 2t \cdot \sqrt{a}x = bx + c \qquad \Rightarrow \quad t^2 - c = bx + 2t \cdot \sqrt{a}x = (b + 2\sqrt{a}t)x$

$\Rightarrow \quad x = \dfrac{t^2 - c}{b + 2\sqrt{a}t}$: xをこれでｔの式に置き換える

$t^2 - 2t \cdot \sqrt{a}x = bx + c$

$\Rightarrow \quad 2tdt - 2\sqrt{a} \cdot tdx - 2\sqrt{a} \cdot xdt = bdx \qquad \Rightarrow 2(t - \sqrt{a} \cdot x)dt = (b + 2\sqrt{a} \cdot t)dx$

$$\Rightarrow \quad dx = \frac{2(t - \sqrt{a} \cdot x)}{b + 2\sqrt{a} \cdot t} dt = \frac{2\left(t - \sqrt{a} \cdot \left(\frac{t^2 - c}{b + 2\sqrt{a}t}\right)\right)}{b + 2\sqrt{a} \cdot t} dt = 2\frac{t\left(b + 2\sqrt{a}t\right) - \sqrt{a}\left(t^2 - c\right)}{\left(b + 2\sqrt{a} \cdot t\right)^2} dt$$

$$= 2\frac{2\sqrt{a}t^2 + bt - \sqrt{a} \cdot t^2 + c\sqrt{a}}{\left(b + 2\sqrt{a} \cdot t\right)^2} dt = 2\frac{\sqrt{a} \cdot t^2 + bt + c\sqrt{a}}{\left(b + 2\sqrt{a} \cdot t\right)^2} dt$$

：dxをこれでtの式とdtに置き換える

$t = \sqrt{ax^2 + bx + c} + \sqrt{a}x$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{ax^2 + bx + c} = t - \sqrt{a}x = t - \sqrt{a}\,\frac{t^2 - c}{b + 2\sqrt{a}t} = \frac{\left(b + 2\sqrt{a}t\right)t - \sqrt{a}\left(t^2 - c\right)}{b + 2\sqrt{a}t}$$

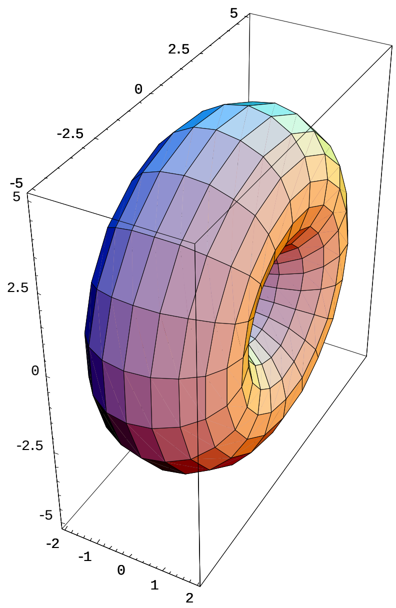
$$= \frac{\left(bt + 2\sqrt{a} \cdot t^2\right) - \sqrt{a}\left(t^2 - c\right)}{b + 2\sqrt{a}t} = \frac{\sqrt{a} \cdot t^2 + bt + c\sqrt{a}}{b + 2\sqrt{a}t}$$

:これで$\sqrt{ax^2 + bx + c}$をｔの式に置き換える

以上ですべてのｘについての式がｔの式、しかも有理式に置き換わった。どこにも平方根が無い！これより先は、ｔの有理式の積分であり、必ず答えが見つかることが保証されている。

[7]

(2) トーラスの形

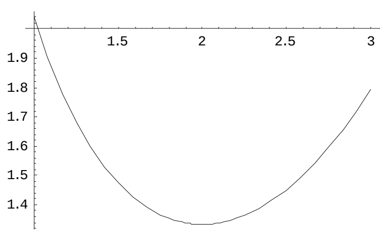


この図を描く mathematica のプログラム

```
ParametricPlot3D[
 {
  2 Sin[u]
  , Cos[t] (3 + 2 Cos[u])
  , Sin[t] (3 + 2 Cos[u])
 }
 , {t, 0, 2 Pi}, {u, 0, 2 Pi}
]
```

[8]

(2)与えられた式をｙのグラフとして描くと



のようになる。弧の長さを求めるにはまずｙの導関数を求める必要がある。

$24xy = x^4 + 48 \qquad \Rightarrow \qquad xy = \dfrac{x^4}{24} + 2$

両辺の微分を求めると　$dx \cdot y + x \cdot dy = \dfrac{4}{24}x^3 dx = \dfrac{1}{6}x^3 dx$

整理して　$x \cdot dy = \left(\dfrac{1}{6}x^3 - y\right)dx$

したがって　$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{1}{6}x^3 - y}{x} = \dfrac{\frac{1}{6}x^3 - y}{x}$

一方、$24xy = x^4 + 48 \Rightarrow y = \dfrac{x^4 + 48}{24x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{6}x^3 - y}{x} = \frac{\frac{x^3}{6} - \frac{x^4+48}{24x}}{x} = \frac{x^2}{6} - \frac{x^2}{24} - \frac{2}{x^2} = \frac{x^2}{8} - \frac{2}{x^2} = \frac{x^4 - 16}{8x^2}$$

線素は　$ds = \sqrt{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \sqrt{1 + \left(\dfrac{x^4 - 16}{8x^2}\right)^2}\,dx = \sqrt{\dfrac{64x^4 + x^8 - 32x^4 + 16^2}{\left(8x^2\right)^2}}\,dx$

$$= \frac{\sqrt{x^8 + 32x^4 + 16^2}}{8x^2}dx = \frac{x^4 + 16}{8x^2}dx = \frac{1}{8}\left(x^2 + \frac{16}{x^2}\right)dx$$

なので、これを$x:1 \to 3$の範囲で積分する。

[9]

（教養として）まずルジャンドル多項式の形を調べておこう。

ルジャンドル多項式の関数形の具体例は

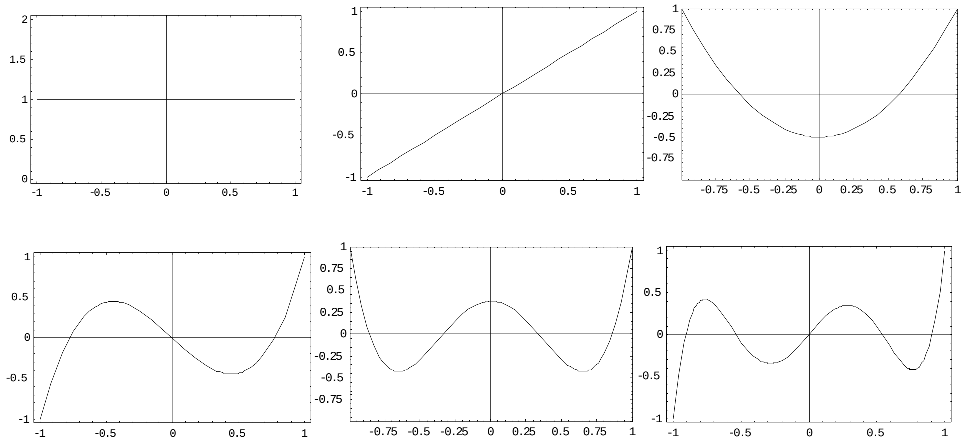
$$P_0 = \frac{1}{2^0 0!}1 = 1$$

$$P_1 = \frac{1}{2^1 1!}\frac{d}{dx}(x^2 - 1) = \frac{1}{2}2x = x$$

$$P_2 = \frac{1}{2^2 2!}\frac{d^2}{dx^2}(x^2 - 1)^2 = \frac{1}{8}\frac{d}{dx}\left(2(x^2 - 1)\cdot 2x\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(x^3 - x\right) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3 = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), P_4 = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), P_5 = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$$

などである。これらをグラフで表示する(左上が次数０、右下が次数５、プロット範囲は <u>0 次の場合を除き</u> x 軸、y 軸ともに−1 と１の間である。)



一般的なｎにおける関数形を求める。ｎ階導関数の形で与えられているのでライプニッツの公式（3 章演習問題[3]参照）を使う。まず準備として

$$\frac{d^m}{dx^m}\left(x^2-1\right)^n=\frac{d^m}{dx^m}\left(\left(x+1\right)^n\left(x-1\right)^n\right)=\sum_{k=0}^{m}{}_mC_k\,\frac{d^{m-k}}{dx^{m-k}}\left(x+1\right)^n\,\frac{d^k}{dx^k}\left(x+1\right)^n$$

$$=\sum_{k=0}^{m}{}_mC_k\left[n\cdot\left(n-1\right)\cdots\left(n-\left(m-k\right)+1\right)\left(x+1\right)^{n-(m-k)}\right]\left[n\cdot\left(n-1\right)\cdots\left(n-k+1\right)\left(x-1\right)^{n-k}\right]$$

$$=\sum_{k=0}^{m}{}_mC_k\,\frac{n!}{\left(n-m+k\right)!}\frac{n!}{(n-k)!}\left(x+1\right)^{n-m+k}\left(x-1\right)^{n-k}$$

…（式１）

である。この計算で m=n の場合がルジャンドル多項式の主要部である。よって

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n=\frac{1}{2^n n!}\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k\,\frac{n!}{k!}\frac{n!}{(n-k)!}\left(x+1\right)^k\left(x-1\right)^{n-k}$$

$$=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\left({}_nC_k\right)^2\left(x+1\right)^k\left(x-1\right)^{n-k}$$

である。

これより、n 次のルジャンドル多項式は次数ｎの x の多項式であることがわかる。

また、区間[－1,＋1]の両端での値は

$$P_n(1)=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\left({}_nC_k\right)^2 2^k 0^{(n-k)}=\frac{1}{2^n}\underbrace{\left({}_nC_n\right)^2}_{1}2^n\underbrace{0^{(n-n)}}_{1}=1$$

$$P_n(-1)=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\left({}_nC_k\right)^2 0^k(-2)^{(n-k)}=\frac{1}{2^n}\underbrace{\left({}_nC_0\right)^2}_{1}0^0\left(-2\right)^n=(-1)^n$$

となる。関数の偶奇性については

$$P_n(-x)=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\left({}_nC_k\right)^2\left((-x)+1\right)^k\left((-x)-1\right)^{n-k}=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\left({}_nC_k\right)^2\left((-x)+1\right)^k\left((-x)-1\right)^{n-k}$$

$$=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\left({}_nC_k\right)^2(-1)^k\left(x-1\right)^k(-1)^{n-k}\left(x+1\right)^{n-k}=\frac{(-1)^n}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\left({}_nC_k\right)^2\left(x-1\right)^k\left(x+1\right)^{n-k}$$

$$=(-1)^n P_n(x)$$

より、n が偶数の時は偶関数、奇数のときは奇関数である。

解答

（1）部分積分を実行する。

$$\int_{-1}^{1}\left(\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\right)x^k dx=\int_{-1}^{1}\left(\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n\right)' x^k dx$$

$$=\left[x^k\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n\right]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}\left(\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n\right)kx^{k-1}dx=-k\int_{-1}^{1}\left(\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n\right)x^{k-1}dx$$

部分積分の第一項[ ]の部分が０である：$(x^2-1)^n$の n-1 階導関数には、（式１）より、和を構成するどの項にも（x−1）のベキ乗と（x+1）のベキ乗が含まれるので、ｘ＝±１の値が０となる。

もう一度部分積分を実行する。

$$\int_{-1}^{1}\left(\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\right)x^k dx=-k\int_{-1}^{1}\left(\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n\right)x^{k-1}dx$$

$$=\left(-k\right)\cdot\left(-k+1\right)\int_{-1}^{1}\left(\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}(x^2-1)^n\right)x^{k-2}dx$$

この作業を x^k のｋが０になるまで続ける（ｋ＜ｎ）。

$$\int_{-1}^{1}\left(\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\right)xdx=\left(-1\right)^k k!\int_{-1}^{1}\left(\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}(x^2-1)^n\right)dx=0$$

最後の０は、部分積分の[ ]が０になったのと同じ理由。証明終わり。

（2）

ルジャンドル多項式はｘの多項式だから、Pn と Pm の積は Pn とｘ^{k}の積を基本構成とできる。

もしｎ＞ｍならば「Pn と Pm の積の定積分−1 から１まで」は（1）により０になる。よって新たに証明すべきものはｎ＝ｍ の場合だけである。こうして教科書

の略解につながる。

略解中で

$$(-1)^n \int_{-1}^{1} (x^2-1)^n \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} (x^2-1)^n dx = (2n)! \int_{-1}^{1} (1-x^2)^n dx$$

は$(x^2-1)^n$ を展開すると x の最高次数が 2n であることに注目すると、2n 階導関数が定数になり、その定数は(2n)!であることが直ちにわかるだろう。あとは演習問題[5]に帰着する。