A. 常微分方程式．階数と次数　　← [1]

- ✓ 微分方程式とは，導関数（あるいは微分）を含む方程式のことである．自然現象や社会現象など現実の問題をとりあつかうとき，微分方程式が不可欠な表現になることが多い．
- ✓ 例：

$$(1)\ x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+y=0$$

$$(2)\ \left(3a\frac{dy}{dx}+2\right)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2=\left(a\frac{dy}{dx}+1\right)\frac{dy}{dx}$$

$$(3)\ \tan\psi\frac{d\rho}{d\theta}=\rho$$

$$(4)\ \frac{d^2y}{dx^2}=12(2x-1)$$

$$(5)\ dy=\frac{b^2x}{a^2y}dx$$

$$(6)\ d\rho=-\frac{a^2\sin 2\theta}{\rho}d\theta$$

$$(7)\ d^2y=(20x^3-12x)dx^2$$

$$(8)\ x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=5u$$

$$(9)\ x\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}=2\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$(10)\ \frac{\partial^3u}{\partial x\partial y\partial z}=(1+3xyz+x^2y^2z^2)u$$

- ✓ 常微分方程式（ordinary differential equation）は，ただ一つの独立変数を含む．上の例(1)-(7)は常微分方程式である．
- ✓ 偏微分方程式(partial differential equation)は，複数の独立変数を含む．上の例(8)-(10)は偏微分方程式である．
- ✓ この解説では常微分方程式だけを扱う．
- ✓ 微分方程式に現れる導関数（あるいは微分）の最高階数がｎのとき，ｎ階(n-th order)微分方程式という．
- ✓ 上の例(3)(5)(6)(8)の階数は？　　[１階]
- ✓ 上の例(1)(4)(7)の階数は？　　[２階]
- ✓ 上の例(10)の階数は？　　[３階]
- ✓ 微分方程式に現れる最高階の導関数（あるいは微分）の「べき」がｍのとき，ｍ次(m-th degree)微分方程式という．上の例では，(2)は２次，それ以外はす

べて１次である．

B.　微分方程式の解．積分定数．

- ✓ 微分方程式の解とは，常にその方程式を満たすような，独立変数と従属変数の関係のことである．
- ✓ たとえば

(A)　$y = c_1 \sin x$

は微分方程式

(B)　$\dfrac{d^2 y}{dx^2} + y = 0$

の一つの解である．なぜなら，(A)を２回微分すれば

(C)　$\dfrac{d^2 y}{dx^2} = -c_1 \sin x$

であり，(A)と(C)を(B)に代入すると

$-c_1 \sin x + c_1 \sin x = 0$

となり，いかなる x についても(A)は(B)を満たすことがわかる．ここで c_1 は定数であればどのような数であってもよい（任意定数）．同様にして

(D)　$y = c_2 \cos x$

も(B)の解であることが示される．c_2 は任意定数．さらに

(E)　$y = c_1 \sin x + c_2 \cos x$

も(B)の解であり，このほうがより一般的である．すなわち，(E)において c_1 をゼロにすれば(D)となり c_2 をゼロにすれば(A)となるので，(E)は(A)と(D)を含んでいる．

- ✓ これらの解に現れた任意定数 c_1 と c_2 は積分定数（constants of integration）と呼ばれる．
- ✓ 解(E)のように，微分方程式の階数と同じ数の任意定数を含むものを一般解（general solution）という．ただし，その任意定数は解を構成する独立な要素（ここでは $\sin x$ と $\cos x$）に対して与えられたものである．
- ✓ 一般解の任意定数に特定の数値を与えたとき，特殊解（particular solution）という．
- ✓ ある微分方程式の解が積分の形で書けたとき（その積分が実行できるかどうかによらず），微分方程式が解とけたと言う．
- ✓

C. 微分方程式の解の検証　← [2]

微分方程式の解を求める作業をはじめる前に，微分方程式と解の関係に慣れるとよい．

例１：

(1)　$y = c_1 x \cos(\ln x) + c_2 x \sin(\ln x) + x \ln x$

が

(2) $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-x\dfrac{dy}{dx}+2y=x\ln x$

の解であることを示せ．

(1)を微分すると

$$\frac{dy}{dx}=(c_2-c_1)\sin(\ln x)+(c_2+c_1)\cos(\ln x)+\ln x+1$$
$$\frac{d^2y}{dx^2}=-(c_2+c_1)\frac{\sin(\ln x)}{x}+(c_2-c_1)\frac{\cos(\ln x)}{x}+\frac{1}{x}$$

となる．もとの微分方程式へ代入にすると解であることが検証できる．

D. 1 階 1 次の微分方程式の解法

この種類の微分方程式は $Mdx+Ndy=0$ の形になる．ここで M,N は x,y の関数である．解法との関連で，さらに分類される．

- **変数分離（Variable Separable）**

微分方程式の各項を整理・変形して

(A) $f(x)dx+F(y)dy=0$

の形になるとき，この変形作業を変数分離（separation of the variables）と呼ぶ．ただし $f(x),F(y)$ は，それぞれ x および y だけの関数である．(A)の形になれば，微分方程式は直ちに積分することができる．すなわち c を任意定数として

(B) $\int f(x)dx+\int F(y)dy=c$

が微分方程式（A）の一般解である．

✓ (A)の形で与えられていない微分方程式は，次のようにして変数分離の形に変形できることがある．

例題： ← [3]（1）

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1+y^2}{(1+x^2)xy}$ の場合

✓ 第一段階：有理関数の分母を払う．もし導関数が含まれるなら独立変数の微分を両辺にかける：

$$(1+x^2)xy\,dy=(1+y^2)dx$$

✓ 第二段階：同じ微分を持つ項をまとめて $X_1Y_2dx+Y_1X_2dy=0$ の形にする（できなければ，この方法は適用できない）．X_1,X_2 は x だけの関数．Y_1,Y_2 は y だけの関数．こうしてから両辺を X_2Y_2 で割れば $\dfrac{X_1}{X_2}dx+\dfrac{Y_1}{Y_2}dy=0$ すなわち(A)の形となる：

$$(1+y^2)dx-(1+x^2)xy\,dy=0$$
$$\frac{1}{(1+x^2)x}dx-\frac{y}{(1+y^2)}dy=0$$

✓　第三段階：各項を別個に積分し(B)を得る：

$$\frac{1}{(1+x^2)x}dx-\frac{y}{(1+y^2)}dy=0$$
$$\int\left[\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}\right]dx-\int\frac{y}{(1+y^2)}dy=\ln x-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)-\frac{1}{2}\ln\left(1+y^2\right)=c'$$
$$\ln\left((1+x^2)(1+y^2)\right)=2\ln x-2c'=\ln x^2+\ln C=\ln Cx^2$$
$$(1+x^2)(1+y^2)=Cx^2$$

例題：　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　← [3]（２）

$$a\left(x\frac{dy}{dx}+2y\right)=xy\frac{dy}{dx}\quad\rightarrow\quad axdy+2aydx=xydy$$
$$\rightarrow\quad 2aydx+x(a-y)dy=0\quad\rightarrow\quad\frac{2a}{x}dx+\frac{a-y}{y}dy=0$$
$$2a\int\frac{dx}{x}+a\int\frac{dy}{y}-\int dy=2a\ln x+a\ln y-y=c$$
$$a\ln\left(x^2y\right)=c+y\quad\rightarrow\quad x^2y=e^{\frac{c+y}{a}}=Ce^{\frac{y}{a}}$$

● 斉次（homogeneous）

微分方程式 $Mdx+Ndx=0$ において M,N がそれぞれ x,y の斉次関数でありかつ同次であるとき，この微分方程式は斉次であるという．（ある関数が x,y の関数において，$x\rightarrow\lambda x, y\rightarrow\lambda y$ なる置きかえをし，それがもとの関数を λ の n 乗倍したものになるとき，その関数を斉次関数という． n をその次数という.）

✓　このような微分方程式は $y=vx$ という置き換えをすれば変数分離の形になる.

✓　例題：　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　← [4]

$$y^2+x^2\frac{dy}{dx}=xy\frac{dy}{dx}\rightarrow y^2dx+(x^2-xy)dy=0,\ \left[y=vx,\ \ dy=vdx+xdv\right]$$
$$\rightarrow$$
$$v^2x^2dx+(x^2-vx^2)(vdx+xdv)=0\rightarrow x^2vdx+x^3(1-v)dv=0$$
$$\frac{dx}{x}+\frac{1-v}{v}dv=0\rightarrow\ln x+\ln v-v=c\rightarrow\ln vx=c+v$$
$$vx=Ce^v\Rightarrow y=Ce^{\frac{y}{x}}$$

- **線形方程式**
  - ✓ 微分方程式において従属変数 y もその導関数も 1 次で現れるとき，これを線形（linear）であるという． 1 階の線形微分方程式は

    (A) $$\frac{dy}{dx}+Py=Q$$

    の形になる．ただし，P,Q は x だけの関数（あるいは定数）である．
  - ✓ (A)を積分するには

    (B) $$y=uz$$

    とおく．ここで，u を x の関数とし z を新しい変数とする．
  - ✓ (B)を微分すると

    (C) $$\frac{dy}{dx}=u\frac{dz}{dx}+z\frac{du}{dx}$$

    であり，これを(A)(B)に代入すると $u\frac{dz}{dx}+z\frac{du}{dx}+Puz=Q$ したがって

    (D) $$u\frac{dz}{dx}+z\left(\frac{du}{dx}+Pu\right)=Q$$

    となる．
  - ✓ できるなら，z の係数がゼロとなるように関数 u を決める．すなわち

    $$\frac{du}{dx}+Pu=0$$

    そうすると

    $$\frac{du}{u}=-Pdx\Rightarrow \ln u=-\int Pdx+C$$

    だから

    (E) $$u=c_1e^{-\int Pdx}$$

    である．
  - ✓ このとき(D)は

    $$u\frac{dz}{dx}=Q$$

    となる．この u に(E)を代入すると，z が求まる．実際

    $$c_1e^{-\int Pdx}\cdot\frac{dz}{dx}=Q\Rightarrow c_1dz=Q\cdot e^{\int Pdx}dx$$

    より

    (F) $$c_1z=\int Qe^{\int Pdx}dx+C$$

✓ (A)の解は(E)(F)を(B)に代入し

(G) $$y = e^{-\int P dx}\left(\int Q e^{\int P dx} dx + C\right)$$

となる.

✓ (G)が解であることは，これを(A)に代入すれば検証できる.

✓ 以上の解法のアイデアは，P=定数，Q=0 の場合の解 $y = Ae^{-Px}$ を基礎にしている．Pが定数ではないとき指数関数の肩が $Px \to \int P dx$ となり，さらに Qがゼロでないとき積分定数 A を xの関数であるとたもの．実際，$y = uz$ とおいたことが後者に対応し，その結果得られる $\dfrac{du}{dx} + Pu = 0$ が Q=0 のときの解を与えている.

✓ 例題： ← [5]

(1) $$\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^{\frac{5}{2}}$$

1 階の線形微分方程式である：

$$P = -\frac{2}{x+1},\ Q = \left(x+1\right)^{\frac{5}{2}}$$

$$y = uz,\quad \frac{dy}{dx} = u\frac{dz}{dx} + z\frac{du}{dx},$$

$$u\frac{dz}{dx} + z\frac{du}{dx} - \frac{2uz}{1+x} = \left(1+x\right)^{\frac{5}{2}}$$

あるいは

(2) $$u\frac{dz}{dx} + z\left(\frac{du}{dx} - \frac{2u}{1+x}\right) = \left(1+x\right)^{\frac{5}{2}}$$

ここで

$$\frac{du}{dx} - \frac{2u}{1+x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{u} = \frac{2dx}{1+x} \quad \Rightarrow \quad \ln u = 2\ln(1+x)$$

簡単のために積分定数を 0 と置いている．すなわち

(3) $$u = (1+x)^2$$

を要請する.

こうして(2)は

$$u\frac{dz}{dx} = (x+1)^{\frac{5}{2}}$$

となり，そのときの uが(3)で与えられているので

$$\frac{dz}{dx}=(x+1)^{\frac{1}{2}} \quad \rightarrow \quad dz=(x+1)^{\frac{1}{2}}dx$$

(4) $$z=\frac{2(x+1)^{\frac{3}{2}}}{3}+C$$

これら(3)(4)を $y=uz$ に代入すると

$$y=\frac{2(x+1)^{\frac{7}{2}}}{3}+C(x+1)^2$$

- **線形方程式に帰着する場合**

✓ $\frac{dy}{dx}+Py=Qy^n$

$z=y^{-n+1}$ とする．

$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}=(-n+1)y^{-n}\frac{dy}{dx}$ だから y^{-n} を微分方程式の両辺にかけて

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+Py^{-n+1}=Q \quad \rightarrow \left(\frac{1}{-n+1}\right)\frac{dz}{dx}+Pz=Q$$

$\rightarrow$

$$\frac{dz}{dx}+(-n+1)Pz=(-n+1)Q$$
$$\frac{dz}{dx}+\tilde{P}z=\tilde{Q}$$

2. n 階 1 次微分方程式

- **定係数線形微分方程式**

(A) $$\frac{d^n y}{dx^n}+p_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+p_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\cdots+p_n y=0,$$ $p_1,p_2,\cdots,p_n$ は定数.

✓ $y=e^{rx}$ とおくと $\left(r^n+p_1r^{n-1}+p_2r^{n-2}+\cdots+p_n\right)e^{rx}=0$ すなわち，この形の解であれば，$\left(r^n+p_1r^{n-1}+p_2r^{n-2}+\cdots+p_n\right)=0$ となるすべての r について常にゼロとなる.

(B) $$\left(r^n+p_1r^{n-1}+p_2r^{n-2}+\cdots+p_n\right)=0$$ ← [6]（1）参考

を**特性方程式**といい，その解 $r_1,r_2,\cdots,r_n$ を特性根という.

✓ 実際

(C) $$e^{r_1x},e^{r_2x},\cdots,e^{r_nx}$$

は(A)の解である．

✓ 任意定数 $c_1,\cdots,c_n$ を用いて

(D) $c_1e^{r_1x}, c_2e^{r_2x}, \cdots, c_ne^{r_nx}$

も(A)の解である．

✓ それらの線形結合

(E) $y=c_1e^{r_1x}+c_2e^{r_2x}+\cdots+c_ne^{r_nx}$ ←［6］(2a) 参考

は(A)の一般解となる．（C）（D）は特殊解である．

- 特性方程式の解が複素数のとき ←［6］(2b) 参考

✓ 特性方程式の係数が実数だから，解は複素共役が対となる．

✓
$$
\begin{aligned}
y &= c_1e^{(a+bi)x}+c_2e^{(a-ib)x}=e^{ax}\left(c_1e^{ibx}+c_2e^{-ibx}\right)\\
&= e^{ax}\left(c_1(\cos bx+i\sin bx)+c_2(\cos bx-i\sin bx)\right)\\
&= e^{ax}\left((c_1+c_2)\cos bx+i(c_1-c_2)\sin bx\right)\\
&= e^{ax}\left(A\cos bx+i\right)
\end{aligned}
$$

- 解が 2 重根のとき ←［6］(2c) 参考

✓ 「重根となる直前」の状態で線形結合をつくり極限として重根へ

✓ $\dfrac{e^{\gamma_1x}-e^{\gamma_2x}}{\gamma_1-\gamma_2}\Rightarrow\lim\limits_{\gamma_1\to\gamma_2}\dfrac{e^{\gamma_1x}-e^{\gamma_2x}}{\gamma_1-\gamma_2}=xe^{\gamma_1x}$ なる解を予測

✓ すなわち特性方程式の重根 γ から $e^{\gamma x}, xe^{\gamma x}$ の 2 個の解が現れる。

✓ これらは線形独立

- 解が n 重根のとき

✓ (x の n - 1 次多項式)と $xe^{\gamma x}$ の積

✓ 例 $y'''-3ay''+3a^2y'-a^3y=0$, 特性方程式は $(\lambda-a)^3=0$

$y=e^{ax}u(x)$とおくと

$y'=ae^{ax}u+e^{ax}u'=e^{ax}(au+u')$

$$
\begin{aligned}
y'' &= ae^{ax}(au+u')+e^{ax}(au'+u'')=a^2e^{ax}u+2ae^{ax}u'+e^{ax}u''\\
&= e^{ax}\left(a^2u+2au'+u''\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y''' &= ae^{ax}\left(a^2u+2au'+u''\right)+e^{ax}\left(a^2u'+2au''+u'''\right)\\
&= e^{ax}\left(\left(a^3u+2a^2u'+au''\right)+\left(a^2u'+2au''+u'''\right)\right)\\
&= e^{ax}\left(a^3u+3a^2u'+3au''+u'''\right)
\end{aligned}
$$

これらをもとの微分方程式に代入し

$\left(a^3u+3a^2u'+3au''+u'''\right)-3a\left(a^2u+2au'+u''\right)+3a^2(au+u')-a^3u$

$=u'''=0$

よって $y=e^{ax}u(x)$ とおいたときの $u(x)$ は次数 2 の多項式である。

特性方程式 $(\lambda-a)^3=0$ のとき解は $y=e^{ax}\left(c_1+c_2x+c_3x^2\right)$

- 非斉次のとき
  - すなわち $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$
  - 以下の記述を簡単にするため，線形微分演算子 L を導入する：
    - $L[y] = \left[\dfrac{d^n}{dx^n} + a_{n-1}\dfrac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1\dfrac{d}{dx} + a_0\right]y$ と書けば
    - 斉次方程式は $L\left[y\right] = 0$，非斉次方程式は $L\left[y\right] = f(x)$
  - 非斉次方程式の解を求めて斉次方程式の一般解との線形和をとる
    - 非斉次方程式の解（特解）を１つ見つけたとしよう：$L\left[y_s\right] = f(x)$
    - 斉次方程式の解は求まる（一般解：積分定数）：$L\left[y_h\right] = 0$
    - $L\left[y_s + y_h\right] = L[y_s] + L[y_h] = f(x) + 0 = f(x)$ より， $y(x) = y_s(x) + y_h(x)$ が

      非斉次方程式の一般解である。