微分法の基礎と応用　極値　スネルの法則

狩野

光線が点 A から B へ進むときの道筋は最短時間で行けるものである（なぜそうなるかという問は興味深い）．たとえば，

① 真空中では，A から B への直線

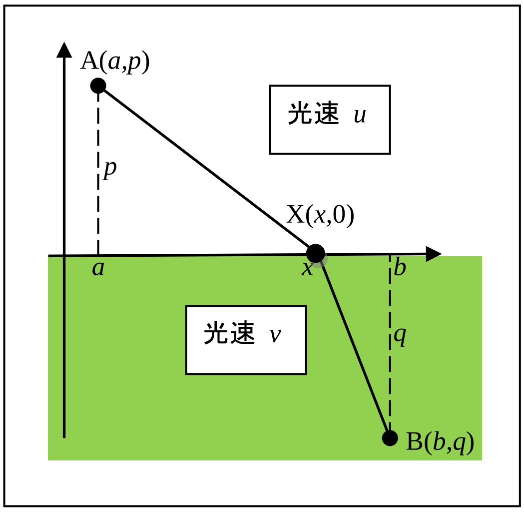
② 平面鏡による反射では，A から B の像への直線が鏡面と交わる点を通る折れ線

③ 凸レンズで A の像が B となる場合は，レンズを通過するどの光線も同じ（最短の）時間になる

④ 屈折率が異なる平面の境界を通過するとき（例：空気からガラスへ），スネルの法則に従う

【スネルの法則を微分法から導く】

物質の屈折率とは，真空中の光の速さを物質中のそれで割ったものである．たとえば，あるガラスの屈折率が 1.5 であるとき，その中を進む光の速度が真空中の 1/1.5 となる．



空気中に平らな表面をもつガラスがある．光の速さは空気中で u，ガラス中で v であるとする．空気中の点 A からガラス中の点 B へ進む光線が境界面上の点 X を通過する．A, X, B は平面上に乗る（さもないと距離 AXB がより大きくなるので時間が延びる）．図のように座標軸をとる．各点の座標は図に記入したとおり．

問題の設定は「a,b,p,q が一定のときに x を変えることで光が A→X→B と進むときの時間 $T(x)$を最短にする」こと．

現実世界の現象としては，このようなとき光線の道筋はひとつに決まる． $a < x < b$ で（$x < a$ あるいは $b < x$ ならば余計に時間がかかることは明らか）最短時間となる位置が一箇所だけある．したがって，$T(x)$を x で微分しゼロとおいて極値を求めると（極値が一つだけなら）それが最短を与えるはずである．

では計算を開始しよう．

AX の距離： $\sqrt{p^2+(x-a)^2}$ 、 経過時間：$\dfrac{1}{u}\sqrt{p^2+(x-a)^2}$

XB の距離： $\sqrt{q^2+(b-x)^2}$ 、 経過時間 $\dfrac{1}{v}\sqrt{p^2+(x-a)^2}$

より

$$T(x)=\frac{1}{u}\sqrt{p^2+(x-a)^2}+\frac{1}{v}\sqrt{q^2+(b-x)^2}$$

となる．x で微分すると

$$\frac{d}{dx}T(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{u}\left(p^2+(x-a)^2\right)^{1/2}+\frac{1}{v}\left(q^2+(b-x)^2\right)^{1/2}\right)\text{: 平方根→「べき」}$$

$$=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{u}\left(p^2+(x-a)^2\right)^{1/2}\right)+\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{v}\left(q^2+(b-x)^2\right)^{1/2}\right)\text{: 「和の微分」→「微分の和」}$$

$$=\frac{1}{u}\frac{d}{dx}\left(p^2+(x-a)^2\right)^{1/2}+\frac{1}{v}\frac{d}{dx}\left(q^2+(b-x)^2\right)^{1/2}\text{: 定数倍を微分の外に出す}$$

$$=\frac{1}{u}\times\frac{1}{2}\left(p^2+(x-a)^2\right)^{(1/2)-1}\frac{d}{dx}\left(p^2+(x-a)^2\right)$$

$$+\frac{1}{v}\times\frac{1}{2}\left(q^2+(b-x)^2\right)^{(1/2)-1}\frac{d}{dx}\left(q^2+(b-x)^2\right)\text{: 合成関数の微分法}$$

$$=\frac{1}{u}\times\frac{1}{2}\left(p^2+(x-a)^2\right)^{-1/2}\left(2(x-a)\right)+\frac{1}{v}\times\frac{1}{2}\left(q^2+(b-x)^2\right)^{-1/2}\left(2(b-x)(-1)\right)$$

$$=\frac{x-a}{u\sqrt{p^2+(x-a)^2}}-\frac{b-x}{v\sqrt{q^2+(b-x)^2}}$$

ここで

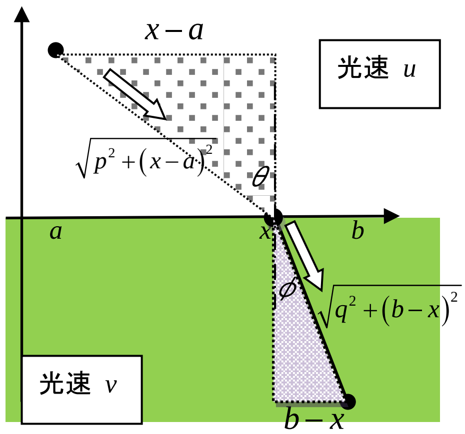
$$\frac{d}{dx}T(x)=\frac{x-a}{u\sqrt{p^2+(x-a)^2}}-\frac{b-x}{v\sqrt{q^2+(b-x)^2}}=0$$

とおき極値を与える x に関する条件を求めると

$$\frac{x-a}{u\sqrt{p^2+(x-a)^2}}=\frac{b-x}{v\sqrt{q^2+(b-x)^2}}$$

$$\rightarrow$$

$$\frac{\left(\dfrac{x-a}{\sqrt{p^2+(x-a)^2}}\right)}{\left(\dfrac{b-x}{\sqrt{q^2+(b-x)^2}}\right)}=\frac{\left(\dfrac{1}{v}\right)}{\left(\dfrac{1}{u}\right)}$$



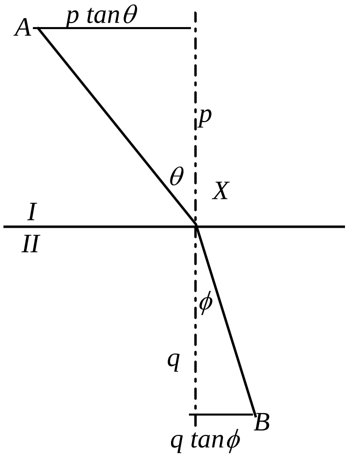
この関係を図の入射角 θと屈折角 ϕを用いて表すと

> スネルの法則: $$\frac{\sin\theta}{\sin\phi}=\frac{\left(\dfrac{1}{v}\right)}{\left(\dfrac{1}{u}\right)}=\frac{\left(\dfrac{c}{v}\right)}{\left(\dfrac{c}{u}\right)}=\frac{\text{出射側の屈折率}}{\text{入射側の屈折率}}$$

たとえば，屈折率の小さい空気の側から，屈折率の大きなガラスに光が進むとき，入射角よりも屈折角が小さくなる．

【別の方法】

こんどは最初から角度を変数とする．　AとBの位置が固定されている（すなわち p，q が一定で，さらにAとBの水平方向の距離が固定されている）　ので



$$p\tan\theta + q\tan\phi = r \text{（一定）} \quad ★$$

なる条件のもとで経過時間

$$\frac{p}{u\cos\theta} + \frac{q}{v\cos\phi} \qquad ★★$$

を最小にする θと Φの関係を求めることが課題である．θと Φは独立に変化しないから「φが θの関数」と言い直そう．

　問題は，第二の関係式★★も θの関数

$$T(\theta) = \frac{p}{u\cos\theta} + \frac{q}{v\cos\phi}$$

と考え，これよりを θで微分して

$$\frac{d}{d\theta}\left[\frac{p}{u\cos\theta} + \frac{q}{v\cos\phi}\right] = 0 \quad ★★★$$

から極値を与える θの条件を求めることである．

★★★の第 1 項の導関数を求めるには

$$\frac{d}{d\theta}\frac{1}{\cos\theta} = \frac{-(-\sin\theta)}{\cos^2\theta} = \frac{\tan\theta}{\cos\theta}$$

の関係を使えばよい．

　★★★の第 2 項の導関数は，cos(φ(θ))の合成関数の微分法を使ってもとめる．このとき dφ/dθが必要となる．それには第一の関係式★に注目し θで微分すると

$$p\frac{d\tan\theta}{d\theta} + q\frac{d\tan\phi}{d\phi}\frac{d\phi}{d\theta} = p\frac{1}{\cos^2\theta} + q\frac{1}{\cos^2\phi}\frac{d\phi}{d\theta} = 0$$

すなわち

$$\frac{d\phi}{d\theta} = \frac{-p}{q}\frac{\cos^2\phi}{\cos^2\theta}$$

という関係を用いる．こうして★★★は

$$\frac{p}{u}\frac{\tan\theta}{\cos\theta} + \frac{q}{v}\frac{\tan\phi}{\cos\phi}\frac{d\phi}{d\theta} = \frac{p}{u}\frac{\tan\theta}{\cos\theta} + \frac{q}{v}\frac{\tan\phi}{\cos\phi} \times \frac{-p\cos^2\phi}{q\cos^2\theta}$$

$$= p\frac{1}{\cos\theta}\left(\frac{\tan\theta}{u} - \frac{\tan\phi\cos\phi}{v\cos\theta}\right) = p\frac{1}{\cos^2\theta}\left(\frac{\sin\theta}{u} - \frac{\sin\phi}{v}\right) = 0$$

となる．

　$\cos\theta \neq 0$ とおいてよい（cos θ=0 すなわち θ=π/2 とは，入射光が界面と平行となってしまう）ので、極値は上式の第2因子が 0 となるときに与えられる．よって

$$\left(\frac{\sin\theta}{u} - \frac{\sin\phi}{v}\right) = 0 \quad \text{あるいは} \quad \frac{\sin\theta}{\sin\phi} = \frac{u}{v}$$

のとき、極値となる．こうしてスネルの法則を得る．