[1]

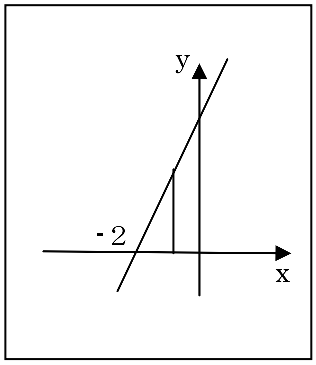
（1）
$$\int_0^2 (x+y)dy = \left[xy + \frac{1}{2}y^2 \right]_{y=0}^2 = 2x+2$$
$$\int_0^3 \left[\int_0^2 (x+y)dy \right] dx = \int_0^3 (2x+2)\,dx = 2\left[\frac{1}{2}x^2 + x \right]_0^3 = 2\frac{15}{2} = 15$$

（2）
$$\int_0^y y\,dx = y\left[x\right]_{x=0}^y = y^2,\quad \int_{1/2}^2 \int_0^y y\,dxdy = \int_{1/2}^2 y^2 dy = \frac{1}{3}\left[y^3\right]_{1/2}^2 = \frac{1}{3}\left(8 - \frac{1}{8}\right) = \frac{21}{8}$$

（3）
$$\int_0^\pi \int_0^{a\cos\phi} \sin\phi \rho\, d\rho\, d\phi = \int_0^\pi \sin\phi \left(\int_0^{a\cos\phi} \rho\, d\rho \right) d\phi = \int_0^\pi \sin\phi \left(\frac{1}{2}a^2\cos^2\phi \right) d\phi$$
$$= \frac{1}{2}a^2 \int_0^\pi \sin\phi \cos^2\phi\, d\phi = \frac{-1}{2}a^2 \int_{t=1}^{-1} t^2 dt = \frac{1}{2}a^2\frac{2}{3} = \frac{a^2}{3}$$

（4）
$$\iint_R e^{ax+by} dxdy = \int_0^m \int_0^m e^{ax+by} dxdy = \int_0^m \frac{1}{a}\left[e^{ax+by} \right]_{x=0}^m dy$$
$$= \frac{1}{a}\int_0^m e^{by}\left(e^{am} - 1\right) dy = \frac{1}{ab}\left(e^{am} - 1\right)\left(e^{bm} - 1\right)$$

（5）
$$\iint_R (y-2x)dxdy = \int_{-2}^0 \left(\int_{y=0}^{y=3x+6} (y-2x)dy \right) dx = \int_{-2}^0 \left[\frac{1}{2}y^2 - 2xy \right]_{y=0}^{3x+6} dx$$
$$= \int_{-2}^0 \left(\frac{1}{2}(3x+6)^2 - 2x(3x+6) \right) dx = \int_{-2}^0 \left(-\frac{3}{2}x^2 + 6x + 18 \right) dx$$
$$= \left[-\frac{1}{2}x^3 + 3x^2 + 18x \right]_{-2}^0 = -\left(4 + 12 - 36\right) = 20$$



[2]

（1）
$$\int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} \left(y + y^3\right) dydx = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{4}y^4 \right]_{y=x}^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 \right] dx$$
$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x^4 \right] dx = \left[\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{20}x^5 \right]_0^1 = \frac{7}{60}$$

（2） $\int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} \left(y + y^3\right) dydx$ 上の積分領域は $y = x$ と $y = x^{1/2}$ で囲まれた領域である。これは

$x = y$ と $x = y^2$ に囲まれた領域であると言い直すことができる。

$$\int_0^1\int_{y^2}^{y}(y+y^3)dxdy=\int_0^1(y+y^3)[x]_{y^2}^{y}dy=\int_0^1(y+y^3)\left(y-y^2\right)dy$$
$$=\int_0^1 y^2-y^3+y^4-y^5dy=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}=\frac{20-15+12-10}{60}=\frac{7}{60}$$

[3]

(1)

$$\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1+x}xyzdzdydx=\int_0^1\int_0^{1-x}xy\left[\frac{1}{2}z^2\right]_0^{1+x}dydx=\int_0^1\int_0^{1-x}xy\frac{1}{2}(1+x)^2dydx=\int_0^1 x\frac{1}{2}(1+x)^2\left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^{1-x}dx$$
$$=\frac{1}{4}\int_0^1 x(1+x)^2(1-x)^2dx=\frac{1}{4}\int_0^1 x\left(1-x^2\right)^2dx=\frac{1}{8}\int_0^1(1-z)^2dz=\frac{1}{8}\int_0^1 w^2dw=\frac{1}{24}$$

(2)

$$\int_0^1\int_{y^2}^1\int_0^{1-x}xdzdxdy=\int_0^1\int_{y^2}^1 x[z]_0^{1-x}dxdy=\int_0^1\int_{y^2}^1 x(1-x)dxdy=\int_0^1\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_{y^2}^1dy$$
$$=\int_0^1\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}y^4+\frac{1}{3}y^6\right]dy=\left[\frac{1}{6}y-\frac{1}{10}y^5+\frac{1}{21}y^7\right]_0^1=\frac{4}{35}$$

(3)

$$\cos^6\phi=\left(\frac{\cos 3\phi+3\cos\phi}{4}\right)^2=\frac{1}{16}\left(\cos^2 3\phi+6\cos 3\phi\cos\phi+9\cos^2\phi\right)$$
$$=\frac{1}{16}\left(\frac{\cos 6\phi+1}{2}+3\left(\cos 4\phi+\cos 2\phi\right)+9\frac{\cos 2\phi+1}{2}\right)$$
$$\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\cos\phi}\int_0^{\rho^2}z\rho\,dzd\rho d\phi=\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\cos\phi}\rho\frac{1}{2}\left[z^2\right]_0^{\rho^2}d\rho d\phi=\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\cos\phi}\frac{1}{2}\rho^5d\rho d\phi=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{12}2^6\cos^6\phi d\phi$$
$$=\frac{16}{3}\int_0^{\pi/2}\cos^6\phi d\phi=\frac{16}{3}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{16}\left(\frac{\cos 6\phi+1}{2}+3\left(\cos 4\phi+\cos 2\phi\right)+9\frac{\cos 2\phi+1}{2}\right)d\phi$$
$$=\frac{1}{3}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{2}+\frac{9}{2}+A\cos 2\phi+B\cos 4\phi+C\cos 6\phi\right)d\phi=\frac{1}{3}\frac{10}{2}\frac{\pi}{2}=\frac{5}{6}\pi$$

ただし cos 関数の周期性に注目して０となることが自明な計算はしなかった。

（４）

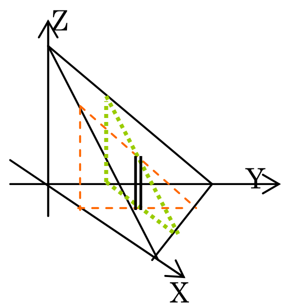
$$\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/6}\int_0^{2} r^2\sin^2\theta\, r^2\sin\theta\, drd\theta d\phi = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/6}\sin^2\theta\sin\theta\left[\frac{1}{5}r^5\right]_0^2 d\theta d\phi = \frac{32}{5}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/6}\sin^3\theta d\theta d\phi$$

$$= 32\int_0^{\pi/2} d\phi\int_0^{\pi/6}\frac{3\sin\theta-\sin3\theta}{4}d\theta = \frac{32}{5}\int_0^{\pi/2} d\phi\int_0^{\pi/6}\frac{3\sin\theta-\sin3\theta}{4}d\theta$$

$$= \frac{32}{5}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\left[-\frac{3}{4}\cos\theta+\frac{1}{12}\cos3\theta\right]_0^{\pi/6} = \frac{16\pi}{5}\left[\frac{-3}{4}\frac{\sqrt{3}}{2}+0+\frac{3}{4}-\frac{1}{12}\right] = \frac{16\pi}{5}\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{8}\sqrt{3}\right)$$

[4]

(1) $\iiint_R 1\cdot dxdydz$ ：★



与えられた積分領域を分解しよう。まず，ｘ＝一定の面（ｙｚ平面に平行な平面）により与えられた領域をカットする。こうしてできる図形はオレンジで描いた三角形である（これを「ｘを固定してできる三角形」と呼ぼう）。次にｙを固定してできる三角形（グリーン）の薄い板を考える。最後に両方の三角板の共通の領域として角柱を考える。

積分を実行するときは，上の分解のプロセスを逆にたどる。まず角柱について，底面積は dxdy であり， (x,y)の座標を持つ斜面の上の点のｚ座標が高さである。この高さは与えられた方程式を解いて，z=(1- x/a - y/b) c である。したがって角柱の体積は

$$\left(c-\frac{c}{a}x-\frac{c}{b}y\right)dydx = \left(\int_0^{c-\frac{c}{a}x-\frac{c}{b}y} 1dz\right)dydx$$

となる（左辺は図形として「高さ×底面積」の表示であり右辺は高さの部分を積分によって書いたもの）。問題の積分★をｚについて実行した結果が左辺である。

次に，ｘを固定したときに得られるオレンジの三角板の体積を求める。この三角板は，上で考えた角柱を，ｘ＝一定のままで，ｙだけ動かすことで得られる。ｙを動かす範囲は，左端が y=0，右端が（与えられた方程式と z=0 の面の交線）1 - x/a - y/b = 0 すなわち y = (1 - x/a)b の位置である。

この板の体積は

$$\left(\int_0^{b-\frac{b}{a}x}\left(\int_0^{c-\frac{c}{a}x-\frac{c}{b}y}1dz\right)dy\right)dx=\left(\int_0^{b-\frac{b}{a}x}\left(c-\frac{c}{a}x-\frac{c}{b}y\right)dy\right)dx=\left(\int_0^{b-\frac{b}{a}x}\left(c-\frac{c}{a}x\right)dy-\int_0^{b-\frac{b}{a}x}\frac{c}{b}ydy\right)dx$$

$$=\left(\left(c-\frac{c}{a}x\right)\left[y\right]_0^{b-\frac{b}{a}x}-\frac{c}{b}\frac{1}{2}\left[y^2\right]_0^{b-\frac{b}{a}x}\right)dx=\left(\left(c-\frac{c}{a}x\right)\left(b-\frac{b}{a}x\right)-\frac{c}{b}\frac{1}{2}\left(b-\frac{b}{a}x\right)^2\right)dx$$

$$=bc\left(\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{x}{a}\right)-\frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{a}\right)^2\right)dx=\frac{bc}{2}\left(1-\frac{x}{a}\right)^2dx$$

である。

最後に，この三角板を x=0 から x=a まで動かして，三角錐の体積を求める。

$$\int_0^a\int_0^{b-\frac{b}{a}x}\int_0^{c-\frac{c}{a}x-\frac{c}{b}y}1dz\,dxdy=\frac{bc}{2}\int_0^a\left(1-\frac{x}{a}\right)^2dx=\frac{abc}{2}\int_0^1\left(1-t\right)^2dt=\frac{abc}{6}$$

（２） 省略

[6] まず与えられた式をそのまま書くと

$$\int_0^x\int_0^{x_n}\cdots\int_0^{x_3}\int_0^{x_2}f(x_1)dx_1dx_2\cdots dx_{n-1}dx_n=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^x(x-s)^{n-1}f(s)ds$$

である．この等式が任意の整数 n について成立することを，数学的帰納法により証明する。（１）等式が n=1 で成り立つこと，（２）n のときに成り立つことを前提として n+1 のときに成り立つことを示す。

n=1 の等式は，左辺が x_1 だけの積分となること，またその積分範囲が x までであることに注意し，右辺 n=1 とおけば $\int_0^x f(x_1)dx_1=\frac{1}{1}\int_0^x(x-s)^0f(s)ds=\int_0^x f(s)ds$ であるが，これは自明。

ｎ+1 のときになりたつはずの等式を書くと

$$\int_0^x\int_0^{x_{n+1}}\cdots\int_0^{x_3}\int_0^{x_2}f(x_1)dx_1dx_2\cdots dx_{n-1}dx_ndx_{n+1}=\frac{1}{n!}\int_0^x(x-s)^nf(s)ds$$

である。左辺で「最後の１つ前」に行う積分は，n のときの等式のを x_{n+1} で置き換えたも

のであり

$$\int_0^{x_{n+1}}\int_0^{x_n}\cdots\int_0^{x_3}\int_0^{x_2} f(x_1)dx_1dx_2\cdots dx_{n-1}dx_n = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^{x_{n+1}}(x_{n+1}-s)^{n-1}f(s)ds$$

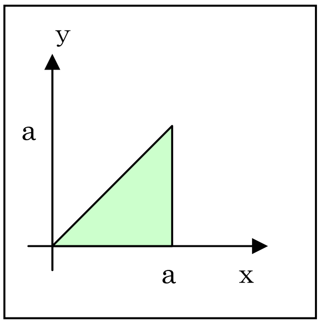
となる．証明すべきことは，上式の右辺（これはｎのときの式の特殊な場合だから，左辺の値を表すものと仮定してよい）を積分（「最後の積分」）したときに，ｎ+1 の等式の右辺となることである．すなわち

$$\int_0^{x}\left(\frac{1}{(n-1)!}\int_0^{x_{n+1}}(x_{n+1}-s)^{n-1}f(s)ds\right)dx_{n+1} \underset{?}{=} \frac{1}{n!}\int_0^{x}(x-s)^n f(s)ds \qquad (☆)$$

左辺の計算を実行するのは多重積分の例題であり，方針は教科書のとおり．一般的に

$$I=\iint_R g(x,y)dxdy$$

の積分領域が教科書例題 6.2 の図 6-4（143 ページ）のような三角形の場合に「y で先に積分し、その後に x で積分する」のと「x で先に積分し、その後に y で積分する」のは、積分変数に対応する積分区間の上端と下端が次のようになっている。



$$I=\int_0^{a}\left(\int_0^{x}g(x,y)dy\right)dx=\int_0^{a}\left(\int_y^{a}g(x,y)dx\right)dy$$

積分(☆)において、ds と dx_{n+1} にこの関係をあてはめると

$$g(x_{n+1},s)=\frac{1}{(n-1)!}(x_{n+1}-s)^{n-1}f(s)$$

$$\int_0^{x}\left(\int_0^{x_{n+1}}g(x_{n+1},s)ds\right)dx_{n+1}=\int_0^{x}\left(\int_s^{x}g(x_{n+1},s)dx_{n+1}\right)ds$$

こうして

$$\int_0^{x}\left(\frac{1}{(n-1)!}\int_0^{x_{n+1}}(x_{n+1}-s)^{n-1}f(s)ds\right)dx_{n+1}=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^{x}\int_s^{x}(x_{n+1}-s)^{n-1}f(s)dx_{n+1}ds$$

$$=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^{x}f(s)\left(\int_s^{x}(x_{n+1}-s)^{n-1}dx_{n+1}\right)ds=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^{x}f(s)\left[\frac{(x_{n+1}-s)^n}{n}\right]_{x_{n+1}=s}^{x}ds$$

$$=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^{x}f(s)\left[\frac{(x-s)^n}{n}-0\right]ds=\frac{1}{n!}\int_0^{x}f(s)(x-s)^n ds$$

となる。

[7]　$y^2dx - x^2dy$ は全微分ではないので与えられた始終点のみならず経路も指定のとおりにする必要がある.

(1)

$C1: x+y=2,\ (0,2)\to(2,0)$

$$\int_{C1} y^2dx - x^2dy = \int_0^2 (2-x)^2\,dx - \int_2^0 (2-y)^2dy$$

$$= \left(\frac{1}{3}2^3\right) - \left(-\frac{1}{3}2^3\right) = \frac{16}{3}$$

(2)

$$\int_{C2} y^2dx - x^2dy = \int_0^2 x^4dx - \int_0^4 ydy = \frac{32}{5} - \frac{16}{2} = -\frac{8}{5}$$

(3)

$$\int_{C3} y^2dx - x^2dy = \int_1^0 \left(1-x^2\right)dx - \int_0^1 (1-y^2)dy = 2\int_0^1 \left(x^2-1\right)dx = 2\left(\frac{1}{3}-1\right) = -\frac{4}{3}$$

(4)

$$\int_{C4} y^2dx - x^2dy = \int_{(0,0)\to(1,0)} y^2dx - x^2dy + \int_{(1,0)\to(1,1)} y^2dx - x^2dy$$

$$= \int_{(0,0)\to(1,0)} y^2dx - \int_{(0,0)\to(1,0)} x^2dy + \int_{(1,0)\to(1,1)} y^2dx - \int_{(1,0)\to(1,1)} x^2dy$$

$$= 0_{[\because y=0]} - 0_{[dy=0]} + 0_{[dx=0]} - 1_{\left[x=1,\int_0^1 dy=1\right]} = -1$$