広義積分
improper integral

積分区間に関する極限

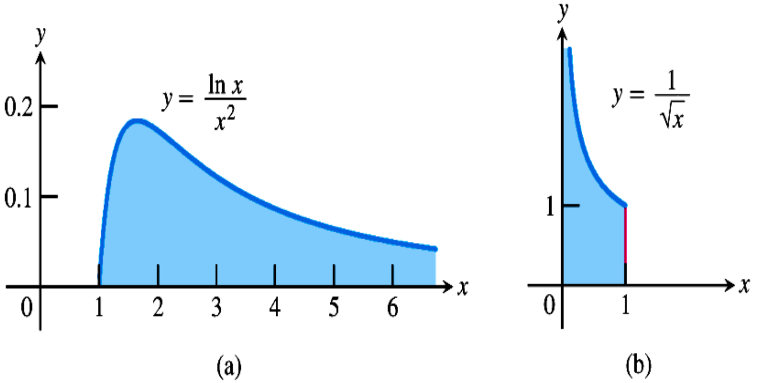
積分区間が無限大の場合

区間に∞がある積分（記号の約束）

$$\int_a^{\infty} f(x)dx \equiv \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx \equiv \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \equiv \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_c^{\infty} f(x)dx$$



無限に続く曲線の下側の面積は有限の値になるだろうか？

例題

$$\int_0^\infty e^{-x/2}dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x/2}dx = \lim_{b\to\infty}\left[-2e^{-x/2}\right]_0^b$$
$$= \lim_{b\to\infty}\left[-2e^{-b/2}+2\right] = 2$$

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\left[\left(\frac{-\ln b}{b} - \frac{-\ln 1}{1}\right) - \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{1}\right)\right]$$
$$= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{-\ln b}{b} - \frac{1}{b} + 1\right] = 0 - 0 + 1 = 1$$
$$\int \frac{\ln x}{x^2}dx = \left[(\ln x)\left(\frac{-1}{x}\right)\right] - \int\left(\frac{-1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)dx$$
$$\lim_{b\to\infty}\frac{\ln b}{b} = \lim_{b\to\infty}\frac{1/b}{1} = 0$$

$p \neq 1$のとき

$$\int_1^b \frac{dx}{x^p} = \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_1^b = \frac{1}{1-p}\left(\frac{1}{b^{p-1}} - 1\right)$$
$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \dfrac{1}{p-1} \cdots p > 1 \\ \infty \cdots p < 1 \end{cases}$$

$p = 1$のとき

$$\int_1^b \frac{dx}{x} = \ln b - \ln 1 = \ln b$$
$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \infty$$

被積分関数が（1点で）発散するとき

$f(x)$が

$(a,b]$で連続のとき

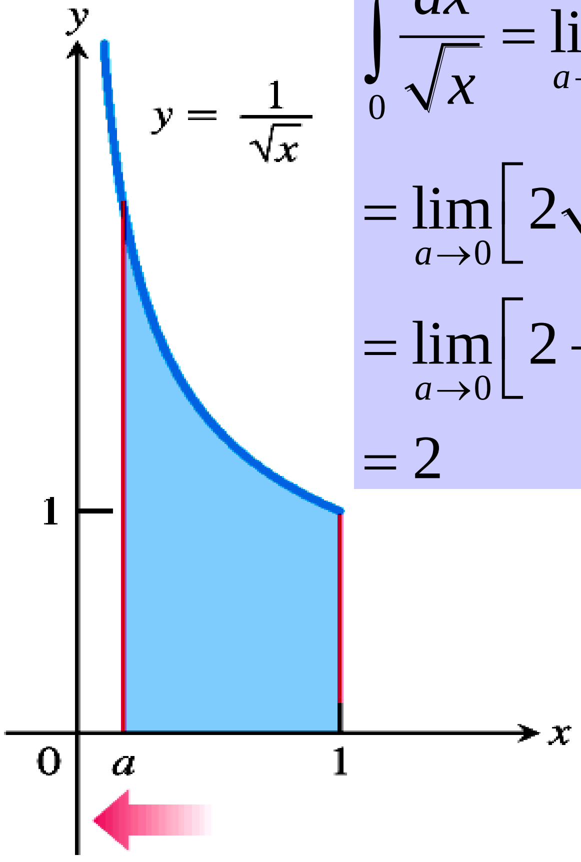
$$\int_a^b f(x)dx \equiv \lim_{c \to a+0} \int_c^b f(x)dx$$

$[a,b)$で連続のとき

$$\int_a^b f(x)dx \equiv \lim_{c \to b-0} \int_a^c f(x)dx$$

$[a,b]$の内点 c を除いて連続のとき

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$



$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{a \to 0} \int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{a \to 0} \left[2\sqrt{x} \right]_a^1$$

$$= \lim_{a \to 0} \left[2 - 2\sqrt{a} \right]$$

$$= 2$$

例題

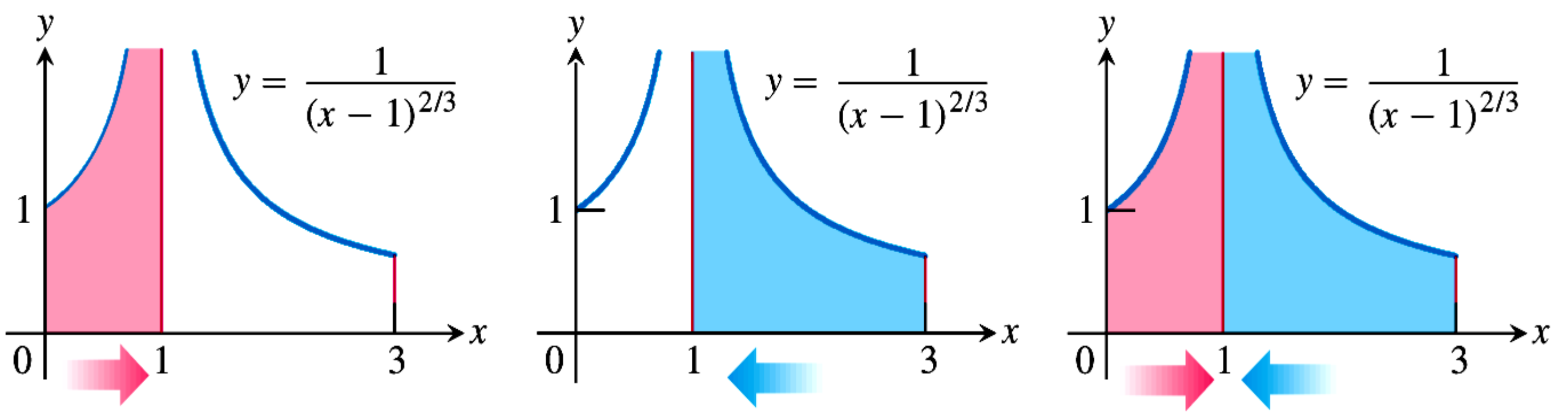
$$\int_0^1 \frac{1}{1-x}dx = \lim_{b\to 1-0}\int_0^b \frac{1}{1-x}dx$$
$$= \lim_{b\to 1-0}\Big[-\ln|1-x|\Big]_0^b$$
$$= \lim_{b\to 1-0}\Big[-\ln(1-b)+0\Big]$$
$$= \infty, \quad b<1$$

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = 3+3\sqrt[3]{2}$$

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} + \int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{b\to 1-0}\int_0^b \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{b\to 1-0}\Big[3(x-1)^{1/3}\Big]_0^b$$
$$= \lim_{b\to 1-0}\Big[2(b-1)^{1/3}-(-3)\Big] = 3$$

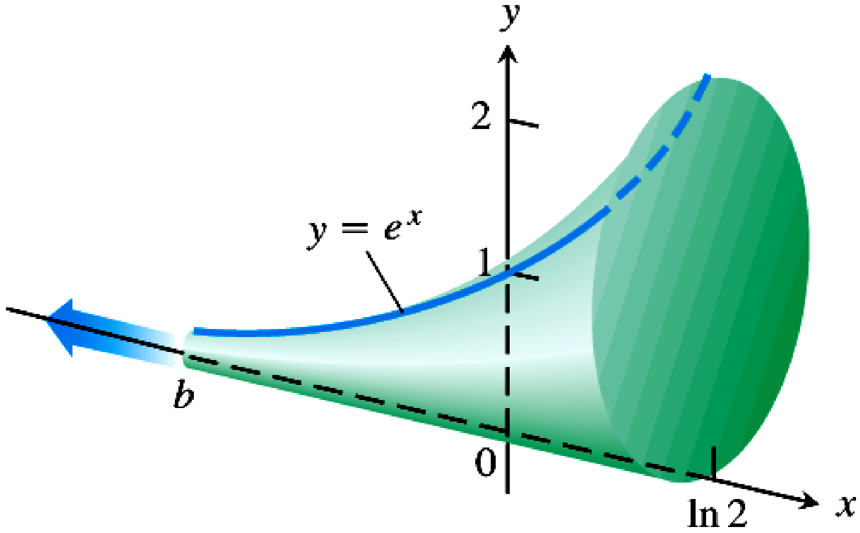
$$\int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = 3\sqrt[3]{2}$$



例題

- 無限に広がる物体の体積

断面が直径 $y = e^x$ の円
-∞ $< x < \ln 2$ の範囲



$A(x)$: x における断面積

$$A(x) = \pi\left(\frac{y}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}e^{2x}$$

$V(b)$: $[b, \ln 2]$ の体積

$$V(b) = \int_b^{\ln 2} \frac{\pi}{4}e^{2x}dx = \frac{\pi}{8}\left[e^{2x}\right]_b^{\ln 2}$$

$$= \frac{\pi}{8}(4 - e^{2b})$$

$$V = \lim_{b \to -\infty} V(b) = \frac{\pi}{2}$$

例題

- ¼円周の長さ，半径２

円の方程式：$x^2+y^2=4$

上半分を表す式：$y=\sqrt{4-x^2}$

$1/4$円周の定義域：$x\in[0,2]$

$$L=\int_0^2\sqrt{1+\left(y'\right)^2}\,dx$$

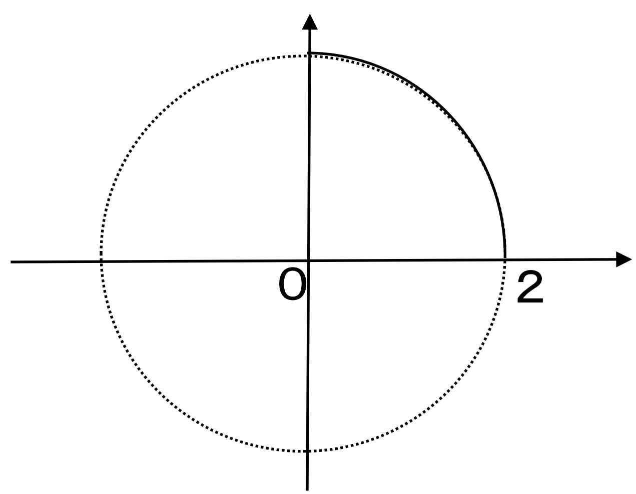
$$y'=\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}:x\in(0,2)$$

$$L=\int_0^2\sqrt{1+\frac{x^2}{4-x^2}}\,dx=\int_0^2\sqrt{\frac{4}{4-x^2}}\,dx$$

$$=\lim_{b\to 2-0}\int_0^b\sqrt{\frac{4}{4-x^2}}\,dx$$

$$\int_0^b\sqrt{\frac{4}{4-x^2}}\,dx=\int_0^b\sqrt{\frac{1}{1-(x/2)^2}}\,dx=2\arcsin\frac{x}{2}$$

$$\lim_{b\to 2-0}\int_0^b\sqrt{\frac{4}{4-x^2}}\,dx=\lim_{b\to 2-0}\left[2\arcsin\frac{b}{2}-0\right]=2\frac{\pi}{2}=\pi$$



広義積分の評価（収束か発散か）

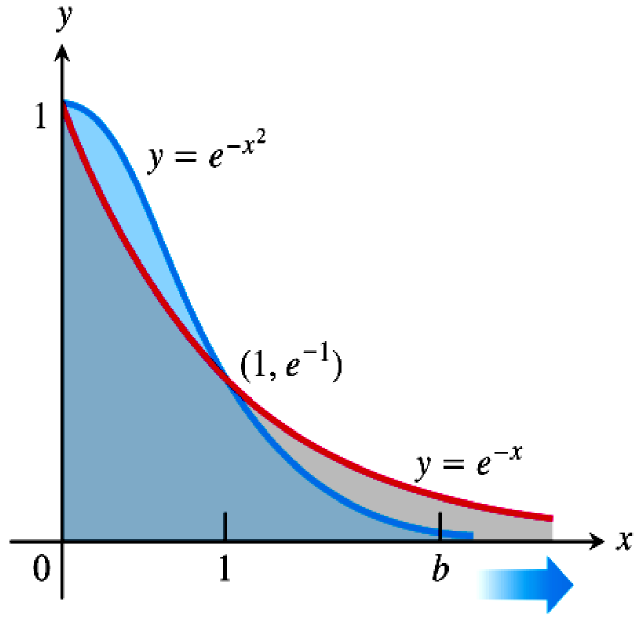
- 原始関数が求まらない場合は既知の広義積分と比較する
- 極限をとると値が求まる場合もある

例題

$$\int_1^\infty e^{-x^2}dx : 収束するか？$$

$$0 < e^{-x^2} \le e^{-x},\ 1 \le x$$

$$0 < \int_1^b e^{-x^2}dx \le \int_1^b e^{-x}dx = -e^{-b} + e^{-1} < e^{-1} \approx 0.37$$



被積分関数を比較して収束・発散を判定する

$[a,\infty)$で連続な関数fとgが区間内すべての x で $0 < f < g$ のとき

$$\int_a^\infty g(x)dx \text{が収束すれば} \int_a^\infty f(x)dx \text{も収束する}$$

$$\int_a^\infty f(x)dx \text{が発散すれば} \int_a^\infty g(x)dx \text{も発散する}$$

$$0 < \int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}dx < \int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = \text{収束}$$

$$\text{発散} = \int_1^\infty \frac{1}{x}dx < \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^2-0.1}}dx$$