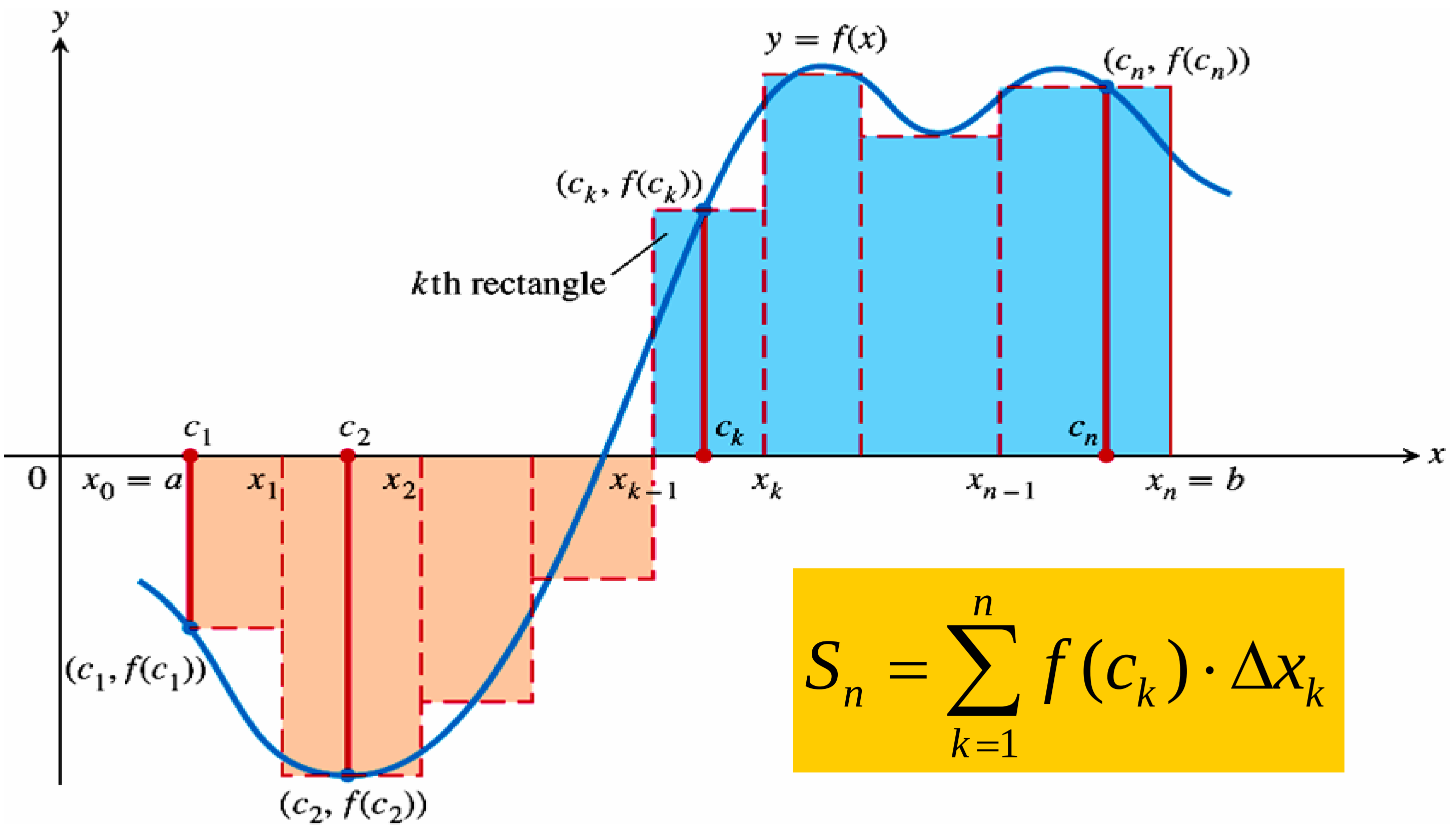
定積分

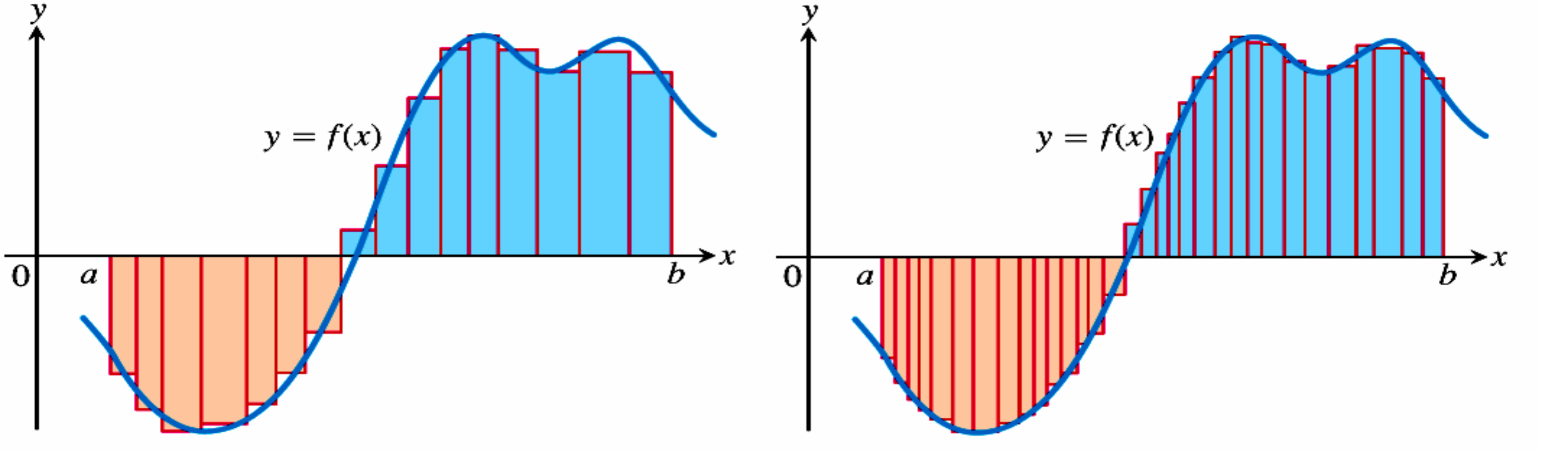
リーマン和の極限

グラフが囲む面積（長方形による近似）



$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k) \cdot \Delta x_k$$

グラフが囲む面積(精度を上げる)



(a) (b)

$f(x)$が区間$[a,b]$で積分可能とは
リーマン和の極限が存在すること。

極限は，<u>どの</u>長方形の面積も0に
近づくようにとる

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = I \equiv \int_a^b f(x)dx$$

任意の連続関数は積分可能

用語

- $f(x)$は区間[a,b]で積分可能
- 積分区間[a,b]での定積分
- 積分区間の上限と下限
- 被積分関数，積分変数
- 積分記号

$$\int_a^b f(x)dx$$

定積分の基本的性質

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b \left(f(x) \pm g(x) \right) dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$$\min f \cdot (b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le \max f \cdot (b-a)$$

$$f(x) \ge 0 \quad on \ [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \ge 0$$

$$f(x) \ge g(x) \quad on \ [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx$$

平均値の定理

$$\int_a^b f(x)dx = f({}^{\exists}c) \cdot (b-a)$$

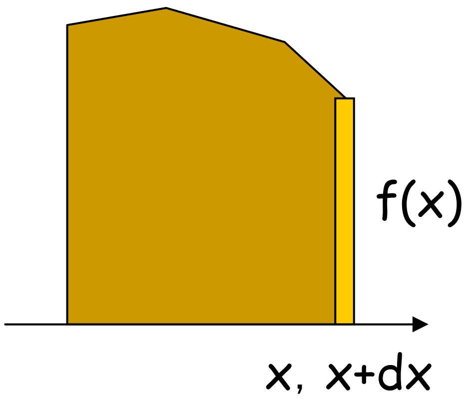
$$f({}^{\exists}c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx, \ c \in [a,b]$$

定積分と不定積分

おなじ積分記号であらわす
ようになったのは後世の発明

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = \lim \frac{1}{\Delta x}\left(\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right)$$

$$= \lim \frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = f(x) : \text{平均値の定理から}$$



$F'(x) = f(x)$のとき，不定積分として

$F(x) = \int f(x)dx$と書くから

$$\frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x)$$

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$$

定積分の計算

- 原始関数を求めて上限と下限を代入
- グラフの面積(体積)を幾何学的に計算
- 数値的に計算

数値積分（台形則）
numerical integration (trapezoidal rule)

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}(y_0 + y_1) + \frac{h}{2}(y_1 + y_2) + \cdots$$

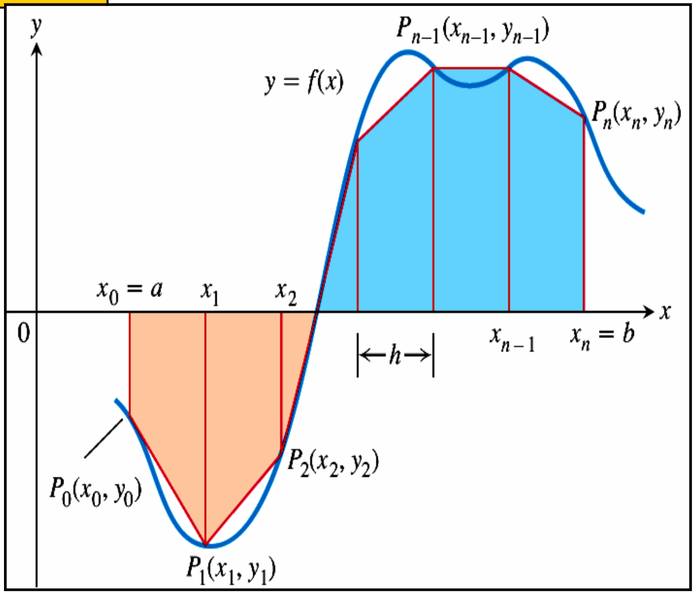
$$= \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n)$$

h : step size

$$y = f(x) = x^2,\ \int_1^2 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_1^2 = \frac{7}{3}$$

x	x^2
1	1
$\frac{5}{4}$	$\frac{25}{16}$
$\frac{6}{4}$	$\frac{36}{16}$
$\frac{7}{4}$	$\frac{49}{16}$
2	4

$$\sum = \frac{75}{32} = 2.34...$$



台形則の誤差の見積もり (計算の過程)

1つの区間で生じる誤差

$$\varepsilon_j \equiv \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)dx - \frac{h}{2}\left(y_j + y_{j+1}\right)$$

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} f^{(2)}(x)\cdot(x-x_j)\cdot(x_{j+1}-x)\,dx$$

$$=\Big[f'(x)(x-x_j)(x_{j+1}-x)\Big]_{x_j}^{x_{j+1}} - \int_{x_j}^{x_{j+1}} f'(x)\cdot\left(-2x+x_j+x_{j+1}\right)dx$$

$$=0-\int_{x_j}^{x_{j+1}} f'(x)\cdot\left(-2x+x_j+x_{j+1}\right)dx = \int_{x_j}^{x_{j+1}} f'(x)\cdot\left(2x-(x_j+x_{j+1})\right)dx$$

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} f'(x)\cdot\left(2x-(x_j+x_{j+1})\right)dx$$

$$=\Big[f(x)\cdot\left(2x-(x_j+x_{j+1})\right)\Big]_{x_j}^{x_{j+1}} - \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)\cdot 2\,dx$$

$$=\Big[f(x_{j+1})(x_{j+1}-x_j)-f(x_j)(x_j-x_{j+1})\Big]-2\int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)\,dx$$

$$\varepsilon_j = -\frac{1}{2}\int_{x_j}^{x_{j+1}} f^{(2)}(x)(x-x_j)(x_{j+1}-x)dx$$

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} (x-x_j)(x_{j+1}-x)dx = \frac{1}{6}(x_{j+1}-x_j)^3 \equiv \frac{h^3}{6}$$

$$-m^{(2)}\frac{h^3}{12} \ge \varepsilon_j \ge -M^{(2)}\frac{h^3}{12}$$

$m^{(2)}$と$M^{(2)}$は$f^{(2)}(x)$の区間内最小・最大

台形則の誤差の見積もり

1つの区間で生じる誤差

$$\varepsilon_j \equiv \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)dx - \frac{h}{2}\left(y_j + y_{j+1}\right)$$が

$$-m^{(2)}\frac{h^3}{12} \geq \varepsilon_j \geq -M^{(2)}\frac{h^3}{12}$$

$$\Rightarrow$$

$$\left|\varepsilon_j\right| \leq \max\left(\left|M^{(2)}\right|, \left|m^{(2)}\right|\right)\frac{h^3}{12}$$

となる

全区間では

$$h \cdot N = (b-a)$$

だから

$$\left|\varepsilon\right| \leq (b-a)\frac{M \cdot h^2}{12}$$

Mを全区間における被積分関数fの2階微分係数の絶対値の最大値とする。

台形則の誤差は

小区間の幅の二乗

M

全区間の幅

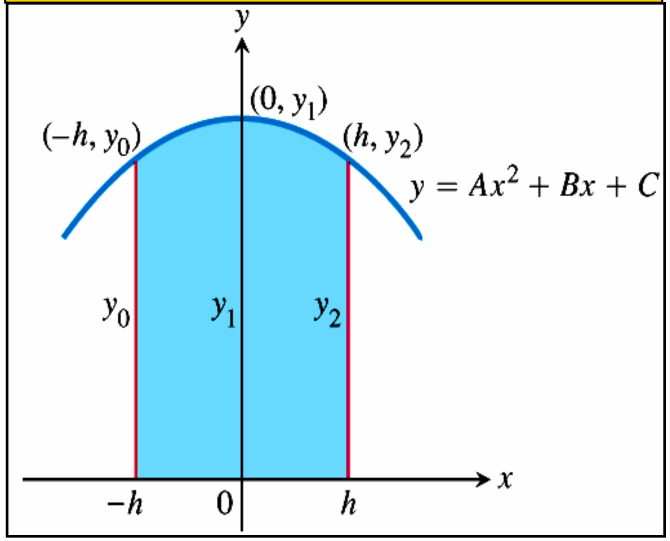
をかけ合わせ　12　で割った程度

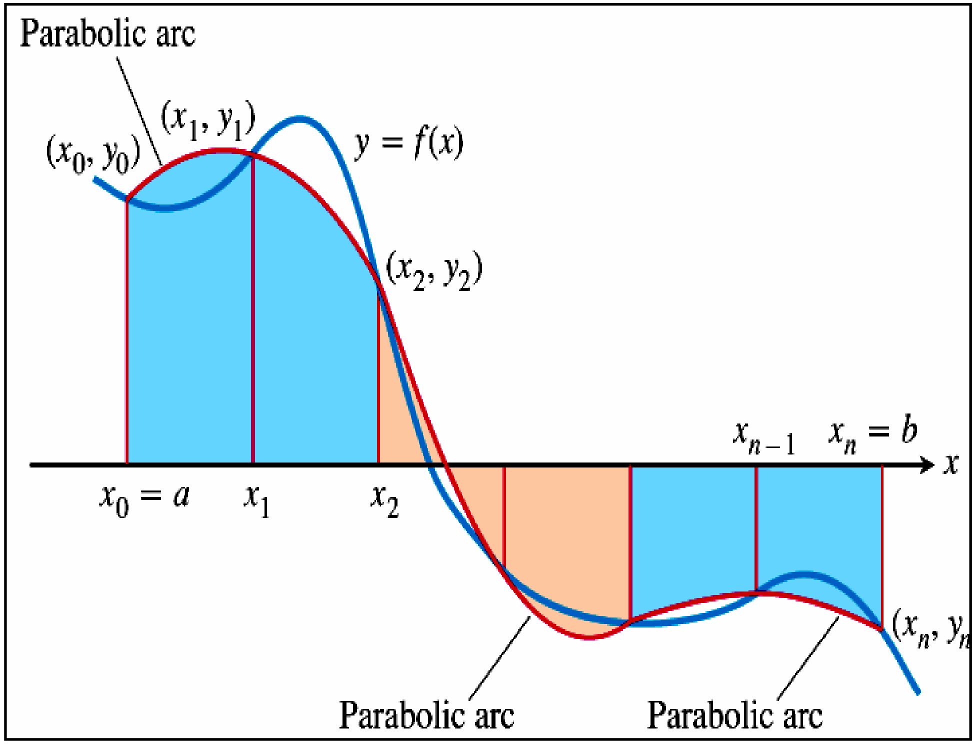
シンプソン則（概要）
Simpson's rule

- 放物線による小区間ごとの近似

$$y = Ax^2 + Bx + C$$

$$\int_{-h}^{h} \left(Ax^2 + Bx + C \right) dx = \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + y_2 \right)$$





シンプソン則

- 小区間の個数は偶数

$$x_0 = a, x_1 = a + h, x_2 = a + 2h, \cdots, x_{n-1} = a + (n-1)h, x_n = b$$
$$n : even$$

- 小区間を継ぐ点は二度使われる

$$S = \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n\right)$$

- 誤差のみつもり

$$|\varepsilon| \le \frac{b-a}{180} h^4 M$$
$$M : \text{区間内の} \left| f^{(4)} \right| \text{の最大値}$$

関数の内積，直交

- 関数をベクトルとみなす
  - $f(x) \sim (\ldots f_{k-1}, f_k, f_{k+1}, \ldots)$
    - 各点における関数値がベクトルの成分
    - 無限次元（実数の濃度）
  - ベクトルとなるために
    - 和：　$f(x) + g(x)$
    - スカラー倍：　$cf(x)$
    - 0元と逆元：$0, -f(x)$
- 内積
  - 対応する成分どうしの積、和：
    $(f, g) = \ldots + f_k g_k + \ldots$
  - 内積は、関数の積の定積分
    $(f, g) = \int f g \, dx$
    積分区間は関数の定義域
- 直交関数系
  - 内積が0となる関数の組

直交する関数の集合の例

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \, dx = 0, \qquad \int_0^{2\pi} \cos nx \, dx = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx \, dx = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \begin{cases} 0 \cdots m \neq n \\ \pi \cdots m = n \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \begin{cases} 0 \cdots m \neq n \\ \pi \cdots m = n \end{cases}$$

その他

積分を微分する

$$\frac{d}{dt}\int_a^t f(x)dx = f(t)$$

$$\frac{d}{dt}\int_a^t f(x,t)dx = ?$$

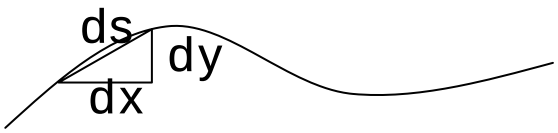
$$\frac{1}{\Delta t}\left(\int_a^{t+\Delta t} f(x,t+\Delta t)dx - \int_a^t f(x,t)dx\right)$$

$$= \frac{1}{\Delta t}\left(\int_t^{t+\Delta t} f(x,t+\Delta t)dx\right) + \frac{1}{\Delta t}\left(\int_a^t f(x,t+\Delta t)dx - \int_a^t f(x,t)dx\right)$$

$$\to f\ (\mathrm{t,t})\ + \int_a^t \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}dx$$

その他

- 曲線の長さ



$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

$$\int_C ds = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

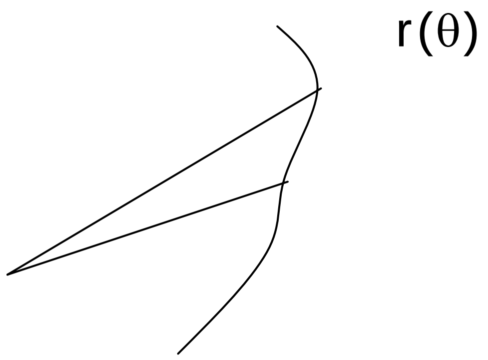
パラメータ表示：$x(t), y(t)$

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

極座標表示の関数のグラフと面積

$$dS = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r^2 d\theta$$



その他（予告編）

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx = ?$$

$$I^2 = \int_0^\infty e^{-x^2} dx \int_0^\infty e^{-y^2} dy = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dxdy$$

dx dy は　面積素片
1/4無限内，棒グラフの体積
極座標表示，
半径　r＝(x²＋y²)^1/2　の円環上で
被積分関数は同一の値を保つ

$$4I^2 = \int_0^\infty e^{-r^2} 2\pi r dr = 2\pi \int_0^\infty e^{-r^2} r dr = \pi \int_0^\infty e^{-u} du = \pi$$

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$