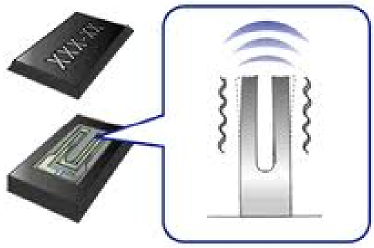
１．　周期現象

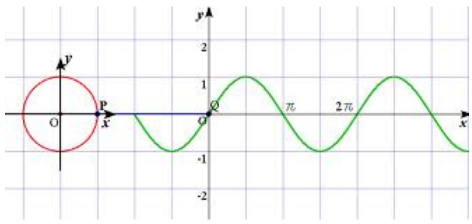


物体の回転や振動に関係する現象には，時間的な周期現象が多い．たとえば，天体の運行，（ときどき乱れるが）心臓の鼓動，音叉の振動，ある音色で持続する音（これは空気の圧力の振動），ある色で持続する光（電場や磁場の振動）．また，規則正しく並んだタイルの列がつくる模様，水面に広がる波紋は，空間的な周期現象の例である．周期現象は，同じパターンが繰り返し現れる現象であり，他にも例はたくさんある．

【問１】

２．　周期

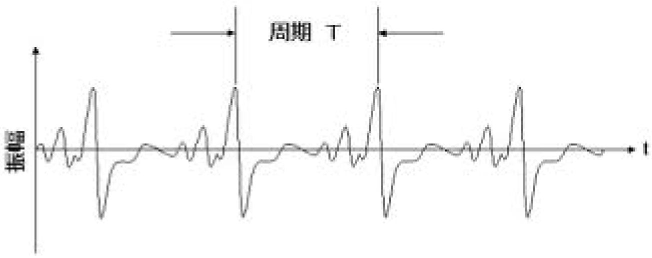
以下，時間的な周期現象を念頭に話を進めるが，用語を選択しなおせば空間的な周期現象にもそのまま適用できる内容である．



あるパターンが繰り返すとき，その１つのパターンが続く時間（もとの状態にもどるまでの時間）を「周期」と言う（空間的な周期現象では，もとの状態にもどるまでの距離を「波長」という）．

「基本周期」とは，それ以下の時間内には繰り返しが現れない時間である．基本周期をいくつかつなげた時間も周期ではあるが，とくに断らないかぎり，基本周期のことを周期と言う．

３．　周期関数



注目する量（たとえば，空気の圧力）を時間の関数$f(t)$で表す．$f(t)$のグラフは，その量の時間的な変化の様子を，紙面上の曲線という空間図形で表現したものである．

$f(t)$が周期Ｔで同じパターンを繰り返すときは，グラフを横にＴだけ平行移動すると前のパターンと重なるのだから，任意のｔについて

$$f(t+T)=f(t)$$

が成り立つ．このような関数は「周期Ｔをもつ（あるいは周期Ｔの）周期関数」と呼ばれる．

【問２】　　周期 Tのとき，nT（n 整数）も周期となることを示せ．

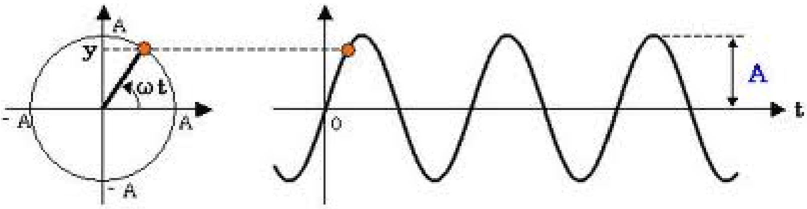
数学的帰納法で照明してみよう．

・周期関数の定義から直接に，n = １のとき$f(t+nT)=f(t+T)=f(t)$となる．

・$f(t+nT)=f(t)$が成り立つなら$f(t+(n+1)T)=f(t)$が成り立つことを示す：

$$f(t+(n+1)T) \underbrace{=}_{\substack{\text{基準の時刻を}\\ \text{t から t+nT}\\ \text{に変更する}}} f\big((t+nT)+T\big) \underbrace{=}_{\substack{\text{t+nT とそれより}\\ \text{さらに T 進んだ}\\ \text{時刻は同じ値}}} f(t+nT) \underbrace{=}_{\substack{\text{帰納法の}\\ \text{前提}}} f(t)$$

４．　サイン・コサインの重要性



(a) 等速円運動　(b) 正弦波（サイン波）

単位円周上の点の位置は，x軸から反時計回りに測った角をθとして，$(\cos\theta, \sin\theta)$である．この点が円周上を一定の速さで運動すると，角度が一定の割合で増える：$\theta = \omega t$.

このとき

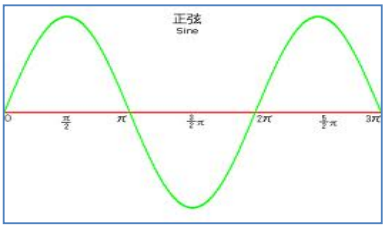
$$\frac{d\theta}{dt} = \omega$$

であり，ωを角速度といい回転の速さを表す量である．θ ：0 → 2π で一周だから，これに対応する時間は t ： 0 → 2π/ω である．言い換えると，この点は周期

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

で円運動というパターンを繰り返す.

もし１周回る間に角度が複雑な仕方で変化するときも周期現象にはなるが，等角速度の円運度が周期現象の基本にあることは疑いない．こうして，サインとコサインがすべての周期現象の基本に座ることになる．



【問 3】sin tの周期は？

$\sin(t+2\pi) = \sin t$より，周期は 2π

周期が T のサイン関数は？

サイン関数の横軸を縮小拡大して周期を T とする．

横軸の拡大縮小を行うと$\sin(\kappa t)$という形になるはず．その周期が T なのだから，

$\sin\big(\kappa(t+T)\big) = \sin(\kappa t)$ となる κ は？：

$$\sin\big(\kappa(t+T)\big) \underbrace{=}_{(\ \ )\text{内を展開}} \sin(\kappa t+\kappa T) \underbrace{=}_{\substack{\sin(\kappa t+\kappa T)\text{が}\sin(\kappa t)\text{と}\\ \text{一致するには}\\ \kappa T=2\pi}} \sin(\kappa t+2\pi) \Rightarrow \boxed{\kappa T = 2\pi}$$

よって$\kappa = \frac{2\pi}{T}$である．言い換えると，時間 t がTだけ経過するときサインの引数（つまり角度）が 2π だけ変化するようにtの係数を調整したのである．

このκは，角速度に他ならない．こうして周期 T（角速度$\omega = 2\pi/T$）のサイン関数は

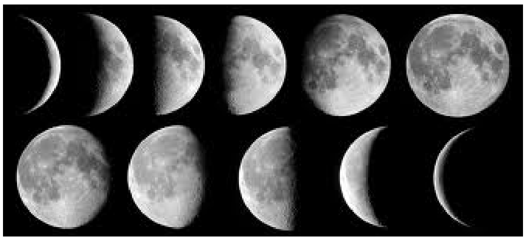
$$\boxed{\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = \sin\omega t}$$

である．

【問４】１秒にν回振動するサイン関数は？

周期が $T = 1/\nu$ となる　→　$\boxed{\sin(2\pi\nu t)}$

５．　位相



位相（phase）は，月の満ち欠けの状態を表す用語である．
１ヶ月で月はもとの位相（新月，半月，満月，など）にもどる．

その類推で，サイン（あるいはコサイン）関数の引数を位相という．たとえば

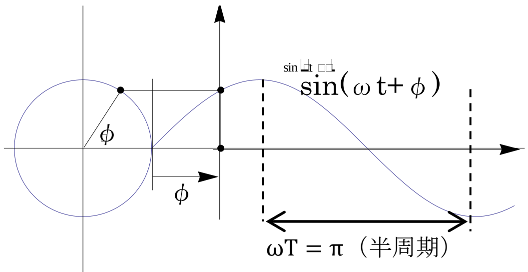
$$\sin\left(\frac{2\pi}{T}t+\phi\right)=\sin(\omega t+\phi)$$

において$\left(\frac{2\pi}{T}t+\phi\right)$と$(\omega t+\phi)$が位相である．

この位相は時間に比例して増大する．

位相は角度だからラジアンで表す．

また，位相$\omega t+\phi$は t =0 でφ，このφを初期位相という．



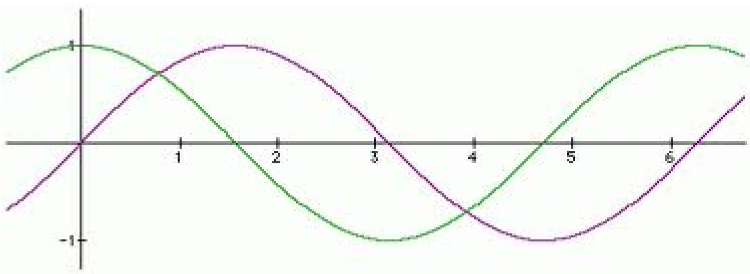
【問５】$x(t)=A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t+\phi\right)$
　　および$x(t)=A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t+\phi\right)$のグラフを描け

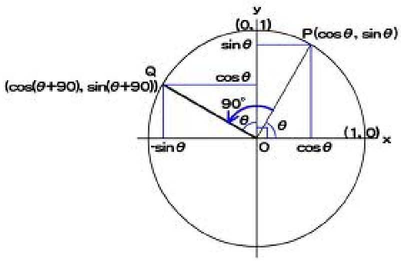
このグラフ↑の横軸は“ωt”

【問６】次の関係を確認せよ（問５に具体的な値を代入して比較せよ）

$$\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)=\cos t,\qquad \cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right)=\sin t$$

サイン関数の位相を$\frac{\pi}{2}$ずらすと，コサイン関数になる．





ネットワークの接続関係を学ぶときなどに，トポロジーという用語が出る．この topology（トポロジー）を位相と訳すことがあるが，ここで習う位相とは全く別物．

６．　サイン・コサインの基本関係

【問７】任意の正整数$\boldsymbol{n}$について次の関係を確認せよ

1) $\mathbf{\sin} n\pi = 0$,　$\mathbf{\cos} n\pi = (-1)^n$,　$\cos n\pi - 1 = \begin{cases} 0 \cdots \mathrm{n}: 偶数 \\ -2 \cdots \mathrm{n}: 奇数 \end{cases}$

2) $\sin(4n-3)\frac{\pi}{2} = 1$，$\cos n\pi(4n-3)\frac{\pi}{2} = 0$，$\sin(4n-1)\frac{\pi}{2} = -1$，$\cos n\pi(4n-1)\frac{\pi}{2} = 0$

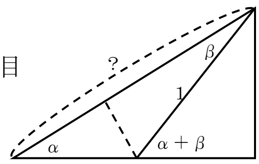
3) $\sin(4n-1)\frac{\pi}{2} = -1$,　$\cos n\pi(4n-1)\frac{\pi}{2} = 0$

解説は省略，必要なら高校数学にもどって復習せよ．

７．　加法定理

この節のテーマ「フーリエ級数」の計算には，三角関数の加法定理が頻出するので，復習をしておく．

【問８】加法定理 $\boxed{\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}$ を表す右図を解説せよ



・右隅の直角三角形に注目すると，高さが$\sin(\alpha+\beta)$である．

・大きな直角三角形の斜辺の長さは，点線を共有する２つの小さな直角三角形に注目すると，$\cos\beta + \sin\beta \times \frac{1}{\tan\alpha}$である．

・大きな三角形の高さは，上で求めた斜辺を用いて，

$$\left(\cos\beta + \sin\beta \times \frac{1}{\tan\alpha}\right) \times \sin\alpha = \left(\cos\beta + \sin\beta \times \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right) \times \sin\alpha = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

【問９】上の加法定理から$\boxed{\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\ \cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$を導け

$\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right) = \cos t$を用いてサインとコサインを変換する．まず

$$-\sin t = \sin(t+\pi) = \sin\left(\left(t+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)$$

を確保，つぎに

$$\cos(\alpha+\beta) = \sin\left((\alpha+\beta)+\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\alpha+\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)\right) = \sin\alpha\cos\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right) + \cos\alpha\sin\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= -\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta$$

【問 10】加法定理から次の関係式を導け

1)　$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\}$

2)　$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\}$

3)　$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\}$

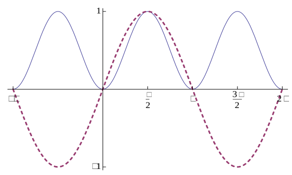
$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$とその$\beta$の符号を反転した式$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$,

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$とその$\beta$の符号を反転した式$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$,

を組み合わせて連立方程式を解けばよい．

【問 11】応用問題

1)　$\sin^2 t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2t$ を確かめよ．　$\sin^2 \mathrm{t}$ のグラフは？　周期は？



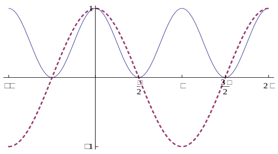
問 10 の 1)で $\alpha = \beta = \mathrm{t}$ とおく:

・$\sin^2 t = \sin t \sin t = \frac{1}{2}\{\cos(t-t) - \cos(t+t)\} = \frac{1}{2}\{\cos 0 - \cos 2t\}$

$$= \frac{1}{2}\{1 - \cos 2t\}$$

あるいは，$\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t = 1 - 2\sin^2 t = 2\cos^2 t - 1$ を解いてもよい..

・$\sin^2 t$の周期は$\cos 2\mathrm{t}$ の周期 π と一致する．



2)　$\cos^2 t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t$ を確かめよ．　$\cos^2 \mathrm{t}$ のグラフは？　周期は？

問 10 の 2)で$= \beta = \mathrm{t}$ とおく：

・$\cos^2 t = \cos \mathrm{t} \cos \mathrm{t} = \frac{1}{2}\{\cos(\mathrm{t}-\mathrm{t}) + \cos(\mathrm{t}+\mathrm{t})\} = \frac{1}{2}\{\cos 0 + \cos 2\mathrm{t}\} = \frac{1}{2}\{1 + \cos 2\mathrm{t}\}$

・周期は π である．

3)　$\sin^3 t = \frac{3}{4}\sin \mathrm{t} - \frac{1}{4}\sin 3\mathrm{t}$を確かめよ．　$\cos^3 t$は？

$\sin^3 t$　：

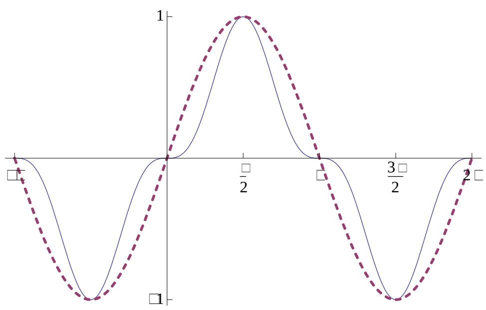
$\sin^3 t = \sin t \times \sin^2 t = \sin t \times \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2t\right) = \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{2}\sin t \cos 2t$

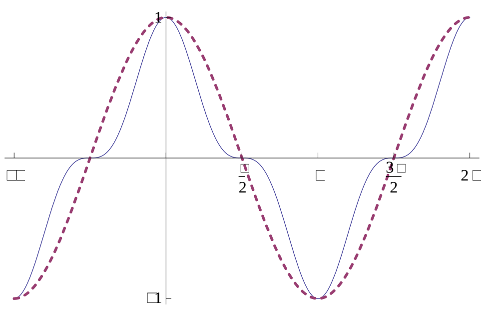
$$= \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\{\sin(\mathrm{t}-2\mathrm{t}) + \sin(\mathrm{t}+2\mathrm{t})\} = \frac{1}{2}\sin t - \frac{-1}{4}\sin t - \frac{1}{4}\sin 3t = \frac{3}{4}\sin t - \frac{1}{4}\sin 3t$$

$\cos^3 t$　：

$\cos^3 t = \sin^3\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{4}\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{4}\sin 3\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{4}\cos t - \frac{1}{4}\sin\left(3t + \frac{3\pi}{2}\right) = \frac{3}{4}\cos t + \frac{1}{4}\cos 3t$

$\sin^3 t, \cos^3 t$の周期は，それぞれ$\sin \mathrm{t}, \cos \mathrm{t}$の周期に一致するので，$2\pi$ となる．





８．　サイン・コサインの直交性

「サイン・コサインの直交性」とは（「直交性」という用語の解説とは別に，定義としては），任意の整数 n, m に対し

1) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin nt\, dt = \int_0^{2\pi} \sin nt\, dt = 0$,　　2) $\int_0^{2\pi} \sin nt \cdot \cos mt\, \mathrm{dt} = 0$

3) $\int_0^{2\pi} \sin nt \cdot \sin mt\, \mathrm{dt} = \int_0^{2\pi} \cos nt \cdot \cos mt\, \mathrm{dt} = \pi\, \delta_{mn}$　ここで$\delta_{mn} = \begin{cases} 1 \cdots \mathrm{n} = \mathrm{m} \\ 0 \cdots \mathrm{n} \neq \mathrm{m} \end{cases}$

が成り立つことである．

上の 1)で積分区間が$[-\pi, \pi]$と$[0, 2\pi]$の積分が等しくなっている．一般に，周期関数の「１周期にわたる積分」の下限（上限）をどこに選んでも同じ値となる．

【問 12】次の積分を確かめよ

1)　　周期 Tの関数$f(t)$について$\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$，ただし$a$は任意

$f(t)$が周期 T の周期関数なので$f(t) = f(t+T)$が成り立つ．

そこで$\int_0^a f(t)dt$の被積分関数を置き換え，

$$\int_0^a f(t)dt = \int_0^a f(t+T)dt$$

である．この右辺において積分変数を$\tau = t + T$とすると，$d\tau = dt$，$\tau : T \to a + T$である．すなわち

$$\int_0^a f(t)dt = \int_0^a f(t+T)dt = \int_T^{a+T} f(\tau)d\tau = \int_T^{a+T} f(t)dt \cdots (*)$$

（ここで最後の等号は τ を t と書き直した）．つぎに積分区間を

$$\int_0^T f(t)dt = \int_0^a f(t)dt + \int_a^T f(t)dt$$

のように分解し，式(*)を用いて右辺第一項を書き換えると

$$\int_0^T f(t)dt = \int_T^{a+T} f(t)dt + \int_a^T f(t)dt = \int_a^{a+T} f(t)dt$$

となり，題意を示すことができた．「周期関数と t 軸に挟まれた部分の１周期にわたる面積は，どこから初めても同じ」という結論だが，これが自明だと思うなら証明は不要である．

【問 12】次の積分を確かめよ

2)　　$\int_0^{2\pi} \sin t\, dt = \int_0^{2\pi} \cos t\, dt = 0$，$\int_{-\pi}^{\pi} \sin t\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \cos t\, dt = 0$

3)　任意の整数 n に対し$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nt\, dt = \int_0^{2\pi} \sin nt\, dt = 0$

解説省略

4)　　任意の整数 n, m に対し$\int_0^{2\pi} \sin nt \cdot \cos mt\, \mathrm{dt} = 0$

問 10 により被積分関数を変換し，すぐ上の問 12 の 3)を用いると，定積分が 0 となる．

5)　**整数** $\boldsymbol{n, m}$ に対し $\int_0^{2\pi}\sin nt\cdot\sin mt\,\mathrm{dt}=\int_0^{2\pi}\cos nt\cdot\cos mt\,\mathrm{dt}=\pi\,\delta_{mn}$

$n\neq m$: 問 10 により被積分関数を変換し，すぐ上の問 12 の 3)を用いると，定積分が 0 となる．

$n=m$: $\int_0^{2\pi}\sin nt\cdot\sin nt\,\mathrm{dt}=\int_0^{2\pi}\sin^2 nt\;dt=\int_0^{2\pi}\sin^2 nt\;dt\underbrace{=}_{\text{問 11 を見よ}}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\{1-\cos 2t\}dt=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{dt}-\int_0^{2\pi}\cos 2t\,\mathrm{dt}=\pi-0=\pi$

$\int_0^{2\pi}\cos nt\cdot\cos mt\,\mathrm{dt}$　についても同様.

これらの関係が，二重線を付けたように，整数 n, m　についてしか成り立たないことは計算の過程から明白である．式の結果だけを暗記しようなど思わずに，公式を自分で導いて欲しい．

9．クロネッカのデルタ　$\boldsymbol{\delta_{mn}=\begin{cases}1\cdots n=m\\0\cdots n\neq m\end{cases}}$

この記号は頻出だから慣れておくと得！！

タイトルに出したクロネッカのデルタの定義式は，次のように読む：式中にδ_{mn}が現れたら，文脈から m と n が等しいかどうかを判定し，等しければδ_{mn}を 1 に置き換え，等しくなければ 0 に置き換える．$\delta_{mn}=\delta_{mn}$である．

m と n は整数である．整数でありさえすれば，どんな文字を用いてもいい．たとえば i と j を使ってδ_{ij}のように書ける．

行列に応用してみよう．「３×３の単位行列 E=$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$の nm 要素は$\delta_{\mathrm{nm}}$である（n, m は 1,2,3)」．具体的には$\delta_{11}=\delta_{22}=\delta_{33}=1$,　　$\delta_{12}=\delta_{21}=\delta_{13}=\delta_{31}=\delta_{23}=\delta_{32}=0$である．全部をべたべた書かなくても，$E_{nm}=\delta_{nm}$と書けば完了するので非常にすっきりする．こんな使い方もある：S=$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$は$S_{\mathrm{nm}}=\mathrm{n}\delta_{\mathrm{nm}}$と書ける．

10. 周期 T のサイン・コサインの直交関係

【問 13】角振動数$\boldsymbol{\omega=2\pi/T}$ のサイン・コサインについて次の積分を確かめよ

$$\int_0^{T}\begin{cases}\sin n\omega t\cdot\sin m\omega t\\\cos n\omega t\cdot\cos m\omega t\end{cases}\mathrm{dt}=\frac{\pi}{\omega}\delta_{mn}=\frac{T}{2}\delta_{mn},\qquad\int_0^{T}\sin n\omega t\cdot\cos m\omega t\;\mathrm{dt}=0$$

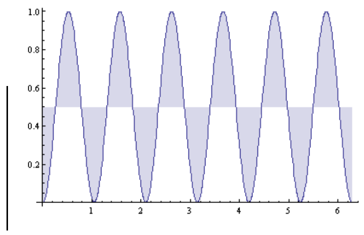
「$\int_0^{T}\begin{cases}\sin n\omega t\cdot\sin m\omega t\\\cos n\omega t\cdot\cos m\omega t\end{cases}\mathrm{dt}$」は「$\int_0^{T}\sin n\omega t\cdot\sin m\omega t\;\mathrm{dt}$ と$\int_0^{T}\cos n\omega t\cdot\cos m\omega t\;\mathrm{dt}$のいずれについても」と読んで欲しかったのだが・・・むろん，こんな書き方は非常識なので，真似しないでください．

$\int_0^{T}\sin n\omega t\cdot\sin m\omega t\;dt$　について

$m=n$の場合

$\int_0^{T}\sin^2 n\omega t\;dt=\int_0^{T}\left(\frac{1}{2}(1-\cos 2n\omega t)\right)dt=\frac{1}{2}\left((T-0)-\frac{1}{2n\omega}(\sin 2n\omega T-0)\right)$

$=\frac{1}{2}\left(T-\frac{1}{2n\omega}\sin(2n\times 2\pi)\right)\underbrace{=}_{\text{ここで「n が整数」を用いる}}\frac{T}{2},$



（最後の等号は，$\omega T=2\pi$ を代入し，sin の引数が 2π の $2n(=$整数$)$倍になった）この結果は，$\sin^2 n\omega t$のグラフを描き 1/2 より上の部分と下の部分の面積を比べると直ちに分かることである．

m ≠ n　の場合

$\sin n\omega t \cdot \sin m\omega t = \frac{1}{2}(\cos(m-n)\omega t - \cos(m+n)\omega t)$より

$$\int_0^{\mathrm{T}} \sin n\omega t \cdot \sin m\omega t \ dt = \frac{1}{2}\left(\int_0^{\mathrm{T}} \cos(m-n)\omega t \, dt - \int_0^{\mathrm{T}} \cos(m+n)\omega t \, dt\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)\omega t}{(m-n)\omega} - \frac{\sin(m+n)\omega t}{(m+n)\omega}\right]_0^{\mathrm{T}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(m-n)\omega T}{(m-n)\omega} - \frac{\sin(m+n)\omega T}{(m+n)\omega}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(m-n)2\pi}{(m-n)\omega} - \frac{\sin(m+n)2\pi}{(m+n)\omega}\right) = 0 - 0 = 0$$

m=n とm ≠ nの場合分けをしなければいけないことは，この計算を実行し分母に$(m-n)$が出てから気づくかもしれない．教科書や説明書は，答えが分かった後で整理し直し論理的に書くものであり，気づいた歴史をそのまま書いているわけではない．

クロネッカのデルタ δ_{mn}を用いて，$m = n$の場合と$m \neq n$ の場合を一つの式で書くと

$$\int_0^{\mathrm{T}} \sin n\omega t \cdot \sin m\omega t \ dt = \frac{T}{2}\delta_{mn}$$

である．

　他の式も同じように計算すればよい．

　周期の値を$T = 2\pi$としたときω = 1，$\int_0^{2\pi} \sin nt \cdot \sin mt \ dt = \pi\delta_{mn}$となっていることを確認しておこう．一般的な式を求めたら，必ず特殊な（わかりやすい）場合で確認すること．

問１３の式変形を Mathematica の数式処理で実行するときのコマンド：

まず

$$\mathrm{Simplify}[\int_0^T \mathrm{Sin}[n\omega t]\mathrm{Sin}[m\omega t] \, dt \, , \omega == 2\frac{\pi}{T}]$$

と書くと，mathematica はω=2π/T の関係だけを考慮し（n と m は整数であるとか，同じ値か否か，とか教えていない）て積分を実行し

$$\frac{n\mathrm{Cos}[2n\pi]\mathrm{Sin}[2m\pi] - m\mathrm{Cos}[2m\pi]\mathrm{Sin}[2n\pi]}{m^2\omega - n^2\omega}$$

という答えを出してくる．分母を見ると n=m のときは別途式を立てるべきだと（人間が）気づくから

$$\mathrm{Simplify}\left[\int_0^T \mathrm{Sin}[n\omega t]^2 \, dt \, , \left\{\mathrm{Element}[n, \mathrm{Integers}], \omega == 2\frac{\pi}{T}\right\}\right]$$

と（$\mathrm{Element}[n, \mathrm{Integers}]$は n が整数であることを教える）

$$\mathrm{Simplify}[\int_0^T \mathrm{Sin}[n\omega t]\mathrm{Sin}[m\omega t] \, dt \, , \{\mathrm{Element}[\{n, m\}, \mathrm{Integers}], \omega == 2\frac{\pi}{T}\}]$$

を別々に実行させると，それぞれ妥当な解を出してくれる．

１１．フーリエ級数

【用語】

周期現象を表す関数$\boldsymbol{f(t)}$**のフーリエ級数**とは

$$f(t) \simeq \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t\}$$

の右辺のことである.「≃」と書いた理由は，左辺と右辺がどのような t の時にもぴったり一致するという保障がないからである．また総和記号が無限の項の和を要求している理由は，$f(t)$が「有限個の三角関数，それも基本周波数の整数倍の周期をもつものだけ」のときなら有限の項で書ける（あたりまえ！！）のだが，そうでない関数だと有限個で書けるわけがないから．このあたりの事情は，テーラー展開と同じである：n 次多項式のテーラー展開は最大 n+1 項のべき級数であるが，多項式でなければ（そして運がよければ）無限の項で表される.

「$\boldsymbol{f(t)}$**をフーリエ展開する**」とは「$f(t)$のフーリエ級数を求める」ことである.「$\boldsymbol{f(t)}$**のフーリエ展開**」とは「$f(t)$のフーリエ級数」のことである.

【フーリエ級数の周期】

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t\}$$

この式は（定数項 $\frac{a_0}{2}$を除き）一番低い角振動数がω(一番長い周期が$\mathrm{T} = \frac{2\pi}{\omega}$), 他の振動数はすべてω の整数倍(他の周期はすべて T の整数分の 1)となるから，基本振動数がωの周期現象を表すものである.

【定数項のグラフ上の意味】

どんな値をベースライン（場合によっては振動の中心，あるいはベースライン）として周期的な振動がおきるかを示す.

【$\boldsymbol{n=1}$**の項のグラフ上の意味】**

$$a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}\left\{\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \cos \omega t + \frac{b_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \sin \omega t\right\} = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \sin(\omega t + \phi_1)\text{, ただし } \tan \phi_1 = \frac{a_1}{b_1}$$

と変形すれば分かるのだが，n=1 のサインとコサインのペアは，その係数a_1とb_1を適切に選べば，任意の振幅$\sqrt{a_1^2 + b_1^2}$，任意の初期位相をもつ振動数ωのサイン関数を表現できる.

【高調波】

同じ高さの音でも，さまざまな楽器の音色が異なる．$n = 1$（基本振動数)に加えて，$n = 2, n = 3, \cdots$の高い振動数がどの程度含まれるかで異なる音色に聞こえるのである．$n = 2$の波を２倍波あるいは第 2 高調波と呼ぶことがある．以下，3 倍波あるいは第３高調波，・・・

フーリエ級数は，高調波がどんな割合で含まれているかという情報に加えて，それぞれの高調波がどんな初期位相を保つか（言い換えると，それぞれの高調波の間の位相の関係）という情報を保っている．これらの情報がそろうと，基本周波数ωをもつ波の形（信号波形）が決まる.

【フーリエ係数】

フーリエ級数に現れる係数 $a_0, a_1, a_2, \cdots, b_1, b_2, b_3, \cdots$をフーリエ係数という．

フーリエ係数を全部決めれば，フーリエ級数が完全に決まる．

もし周期関数$f(t)$がフーリエ級数に展開できるなら，フーリエ係数を$f(t)$から算出することができる．関数が区分的に連続なとき（とびとびに跳びがあるとき），フーリエ級数はその位置で関数値を正確に再現できないが，それ以外の位置では関数値を再現できる．したがって，フーリエ係数の組を指定することと，周期関数を定義することとは同等である．無限個ある係数をすべて与えなくても，関数の様子をかなり再現できるときは，時間軸上で変動する周期関数を僅かな数の係数の組で表すことができるのである．

【問 14】 $\sin^2 t$，$\sin^3 t$，$\sin^2 t + \cos^3 t$ をフーリエ展開せよ．（問 11 参照）

ある関数がフーリエ展開できたときは

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t\}$$

という形になっている（一般的には無限の項が必要だが，ある n から先のフーリエ係数が全部 0 という場合もあってよい）．

そこで問 11 を見ると，すでに

$$\boxed{\sin^2 t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2t}, \quad \boxed{\cos^2 t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t}, \quad \sin^3 t = \frac{3}{4}\sin \mathrm{t} - \frac{1}{4}\sin 3\mathrm{t}$$

という形になっているではないか！さらに

$$\cos^3 t = \sin^3\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{4}\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{4}\sin 3\left(\mathrm{t} + \frac{\pi}{2}\right)\sin^3 t = \frac{3}{4}\cos \mathrm{t} + \frac{1}{4}\cos 3\mathrm{t}$$

を既知とすると

$$\boxed{\sin^2 t + \cos^3 t =} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2t\right) + \left(\frac{3}{4}\cos \mathrm{t} + \frac{1}{4}\cos 3\mathrm{t}\right) = \boxed{\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\cos \mathrm{t} - \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{4}\cos 3\mathrm{t}}$$

である．これらがフーリエ展開の結果であることは，積分計算をしなくても推定できる．

「有限個の項しかなくてもフーリエ級数というか？」

そう言うことにしておいても何ら支障はない（が，あまり言わないかもしれない）．

後にフーリエ係数を関数の積分により計算する方法を学ぶが，ここではその作業を要求していない．もしその計算をしようとすれば，けっきょくは倍角の公式と加法定理を用いることになる．積分によりフーリエ係数を求めるときには，基本周期が何かをきちんと把握しておかないといけない．

問 11 のグラフを見れば（式を見ても）分かるように，$\sin^2 t$と$\cos^2 t$の周期は（2π でなく）π である．言い換えると，基本周波数は$\omega = 2$となる．そうすると

$$\sin^2 t = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos 2t + a_2 \cos 4t + \cdots + b_1 \sin 2t + b_2 \sin 4t + \cdots$$

というフーリエ展開が可能なはずである．後で学ぶように，周期 π の範囲で積分し

$a_0 = \frac{1}{\pi/2}\int_0^{\pi} \sin^2 t\, dt = \frac{1}{\pi/2} \times \frac{1}{2}\pi = 1$ （$\frac{\text{フーリエ級数は}\, a_0}{2}$ として現れる），$a_1 = \frac{1}{\pi/2}\int_0^{\pi} \sin^2 t \cos 2t\, dt = \cdots$

などの積分を実行すればよい．

１２．フーリエ級数を算出する方法

周期２π の関数$f(t)$が

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\{a_n \cos nt + b_n \sin nt\}$$

と展開されているとき，そのフーリエ係数は次の積分により与えられる：

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t) dt, \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt\, dt, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin nt\, dt \qquad (*)$$

【問 15】サイン・コサインの直交性と，フーリエ級数の定義から上の式（*）を導け

まず$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t) dt$について，

$$\int_0^{2\pi} f(t)\, \mathrm{dt} = \int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2} \mathrm{dt} + \int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\{a_n \cos nt + b_n \sin nt\}\right)\mathrm{dt}$$

$$= \frac{a_0}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{dt} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n \int_0^{2\pi}\cos nt\ \mathrm{dt}\right\} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{b_n \int_0^{2\pi}\sin nt\ \mathrm{dt}\right\} = \frac{a_0}{2} \times 2\pi + 0 + 0 = \pi a_0$$

よって

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t) dt$$

が成り立つ．つぎに$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt\, dt$について，$f(t) \times \cos nt$を積分するのだが，総和記号の添え字を n と書いてしまったので，$\times \cos nt$のnと混同して事故が起きるのを防ぐため，$f(t) \times \cos mt$を積分することにしよう（総和記号のmを別な文字に替えてもかまわない）：

$$\int_0^{2\pi} f(t)\cos mt\, \mathrm{dt} = \int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2}\cos mt\, \mathrm{dt} + \int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\{a_n \cos nt + b_n \sin nt\}\right)\cos mt\, \mathrm{dt}$$

$$= \frac{a_0}{2}\int_0^{2\pi}\cos mt\, \mathrm{dt} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n \int_0^{2\pi}\cos nt\ \cos mt\, \mathrm{dt}\right\} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{b_n \int_0^{2\pi}\sin nt\ \cos mt\, \mathrm{dt}\right\}$$

$$= 0 + \sum_{n=1}^{\infty}\{a_n \times \pi\delta_{nm}\} + \sum_{n=1}^{\infty}\{b_n \times 0\} = \pi a_m$$

よって

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos mt\, dt$$ (mをnと書き直しても，　式の具体的な内容は変わらない)

最後に

$$\int_0^{2\pi} f(t)\sin mt\,\mathrm{dt} = \int_0^{2\pi}\frac{a_0}{2}\sin mt\,\mathrm{dt} + \int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\{a_n\cos nt + b_n\sin nt\}\right)\sin mt\,\mathrm{dt}$$

$$= \frac{a_0}{2}\int_0^{2\pi}\sin mt\,\mathrm{dt} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\int_0^{2\pi}\cos nt\ \sin mt\,\mathrm{dt}\right\} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{b_n\int_0^{2\pi}\sin nt\ \sin mt\,\mathrm{dt}\right\}$$

$$= 0 + \sum_{n=1}^{\infty}\{a_n\times 0\} + \sum_{n=1}^{\infty}\{b_n\times\pi\delta_{nm}\} = \pi\, b_m$$

となるので

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin mt\,dt$$

問 12－1)から，周期関数の定積分は，どこを積分の下限にとっても，１周期積分すると同じ値になるので

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos mt\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos mt\,dt$$

などとなる．

１３．直交関数系（高度な話なので省略可）

「直交」は幾何学の用語である．これが線形代数に受け継がれ「２つのベクトルの内積が 0 となるときに，それらのベクトルは互いに直交する」と言うようになった．

ベクトルがベクトルである所以は，$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$，$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$の和が$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$と定義されているところにある．ここで，関数$f(t)$をベクトルと見なそうと思う．関数は，$t$の値を決めると$f(t)$という値が決まる装置である．もし$t$が 1, 2, 3 の３つの値しかとらず，対応する関数値がf_1, f_2, f_3ならば，

$$f(t)\quad \underbrace{=}_{\substack{\text{この等号は}\\\text{同一視する}\\\text{という意味}}}\quad (f_1, f_2, f_3)$$

がベクトルだというのである．それは，通常の関数の和が$f(t) + g(t) = (f_1 + g_1, f_2 + g_2, f_3 + g_3)$となることによる．変数 t が実数の連続性をもって変化しても関数の和の性質はかわらないから，無限次元それも実数の濃度の連続性をもったベクトルの集まり（関数を要素とする空間）ができあがる．

３次元ベクトル $\vec{a}$と$\vec{b}$が直交するとは，内積

$$(\vec{a}, \vec{b}) = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) = \sum_{n=1}^{3} a_n\, b_n$$

を定義したうえで

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \sum_{n=1}^{3} a_n\, b_n = 0$$

のことであると定義される．これに対応して，関数をベクトルと見なしたときは

$$(f, g) = \lim_{\substack{\mathrm{N}\to\infty\\\Delta\mathrm{t}\to 0}} \sum_{n=1}^{N} f(t_n) g(t_n)\Delta t = \int_{\mathrm{R}} f(t) g(t) dt = 0$$

ならばfとgが直交する（定積分の R は積分区間を表す）．$\{1, \cos\omega t, \cos 2\omega t, \cdots, \cos n\omega t, \cdots,\ \sin\omega t, \sin 2\omega t, \cdots, \sin n\omega t, \cdots\}$の

中からどの２つをとっても直交する．自分自身との内積は０ではない．このときサインとコサインが直交（する）関数（の）系＝直交関数系をなすという．

【問 16】 周期Tのときに，上式が次のようになることを確認せよ

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\frac{2\pi nt}{T}dt = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos\frac{2\pi nt}{T}dt, \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\frac{2\pi nt}{T}dt = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin\frac{2\pi nt}{T}dt$$

積分区間は$[0,T]$で書くことにする．周期が Tのとき角振動数は$\omega = 2\pi/\mathrm{T}$だから

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\{a_n\cos n\omega t + b_n\sin n\omega t\}$$

のとき

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega t\,dt, \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega t\,dt$$

となることを示せばよい（第一式は$n = 0$の場合も含む）．問 13 で

$$\int_0^{\mathrm{T}}\begin{cases}\sin n\omega t\cdot\sin m\omega \mathrm{t}\\ \cos n\omega t\cdot\cos m\omega \mathrm{t}\end{cases}\mathrm{dt} = \frac{\pi}{\omega}\delta_{mn} = \frac{\mathrm{T}}{2}\delta_{mn}, \qquad \int_0^{\mathrm{T}}\sin n\omega t\cdot\cos m\omega t\ \mathrm{dt} = 0$$

を得ている．そこでまず

まず$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos 0\,dt = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt$について，

$$\int_0^T f(t)\,\mathrm{dt} = \int_0^{\mathrm{T}}\frac{a_0}{2}\mathrm{dt} + \int_0^{\mathrm{T}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\{a_n\cos n\omega t + b_n\sin n\omega t\}\right)\mathrm{dt}$$

$$= \frac{a_0}{2}\int_0^{\mathrm{T}}\mathrm{dt} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\int_0^{\mathrm{T}}\cos n\omega t\ \mathrm{dt}\right\} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{b_n\int_0^{\mathrm{T}}\sin n\omega t\ \mathrm{dt}\right\} = \frac{a_0}{2}\times\mathrm{T} + 0 + 0 = \frac{\mathrm{T}}{2}a_0$$

よって

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt$$

が成り立つ．

つぎに$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega t\,dt$について．混同をさけるため，$f(t)\times\cos m\omega t$を積分することにしよう：

$$\int_0^{\mathrm{T}} f(t)\cos m\omega t\,\mathrm{dt} = \int_0^{\mathrm{T}}\frac{a_0}{2}\cos m\omega t\,\mathrm{dt} + \int_0^{\mathrm{T}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\{a_n\cos n\omega t + b_n\sin n\omega t\}\right)\cos m\omega t\,\mathrm{dt}$$

$$= \frac{a_0}{2}\int_0^{\mathrm{T}}\cos m\omega t\,\mathrm{dt} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\int_0^{\mathrm{T}}\cos n\omega t\ \cos m\omega t\,\mathrm{dt}\right\} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{b_n\int_0^{\mathrm{T}}\sin n\omega t\ \cos m\omega t\,\mathrm{dt}\right\}$$

$$= 0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\times\frac{T}{2}\delta_{nm}\right\} + \sum_{n=1}^{\infty}\{b_n\times 0\} = \frac{T}{2}a_m$$

よって

$$a_m = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos m\omega t\,dt$$

最後に

$$\int_0^T f(t)\sin m\omega t\,\mathrm{dt} = \int_0^{\mathrm{T}} \frac{a_0}{2}\sin m\omega t\,\mathrm{dt} + \int_0^{\mathrm{T}} \left(\sum_{n=1}^{\infty}\{a_n\cos n\omega t + b_n \sin n\omega t\}\right)\sin m\omega t\,\mathrm{dt}$$

$$= \frac{a_0}{2}\int_0^{\mathrm{T}} \sin m\omega t\,\mathrm{dt} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n \int_0^{\mathrm{T}} \cos n\omega t\ \sin m\omega t\,\mathrm{dt}\right\} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{b_n \int_0^{\mathrm{T}} \sin n\omega t\ \sin m\omega t\,\mathrm{dt}\right\}$$

$$= 0 + \sum_{n=1}^{\infty}\{a_n \times 0\} + \sum_{n=1}^{\infty}\{b_n \times \frac{T}{2}\delta_{nm}\} = \frac{T}{2}\,b_m$$

となるので

$$b_m = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin m\omega t\,dt$$

である．

【スペクトル】

以上の準備により，与えられた周期関数のフーリエ係数を算出する準備ができた．いいかえると，与えられた周期的な信号のなかに，どんな周波数の成分がどれくらいの大きさと位相で含まれているかを計算することができるようになったのである．t 軸上の周期的な信号が含む情報と同等のものを，ω 軸上に表現できる．後者を振幅**スペクトル**ということがある．「フーリエ係数を求めると，信号の振幅スペクトルを知ることができる」．振幅と断ったのは，振幅の 2 乗のスペクトルを「エネルギースペクトル」として論じることもあるから．

１３．フーリエ・サイン級数とフーリエ・コサイン級数

サインが奇関数，コサインが偶関数であることを既知としよう．奇関数同士の和は奇関数，偶関数同士の和は偶関数である．実際，$g_1(t), g_2(t)$を偶関数，$h_1(t), h_2(t)$を奇関数とすると

$$g_k(-t) = g_k(t),\quad h_k(-t) = -h_k(t),\qquad k = 1,2$$

だから$g(t) = ag_1(t) + bg_2(t)$, $h(t) = ah_1(t) + bh_2(t)$

$$g(-t) = ag_1(-t) + bg_2(-t) = ag_1(t) + bg_2(t) = g(t)$$

$$h(-t) = ah_1(-t) + bh_2(-t) = -ah_1(t) - bh_2(t) = -\big(ah_1(t) + bh_2(t)\big) = -h(t)$$

である．こうしてフーリエ級数は

$$f(t) = \underbrace{\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t}_{\text{偶関数}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t}_{\text{奇関数}}$$

という構成になる．右辺の前半部分をフーリエ・コサイン級数といい，後半部分フーリエ・サイン級数と呼ぶことがある．

【問 17】奇（偶）関数のフーリエ展開はサイン（コサインと定数項）<u>だけ</u>となることを確認せよ

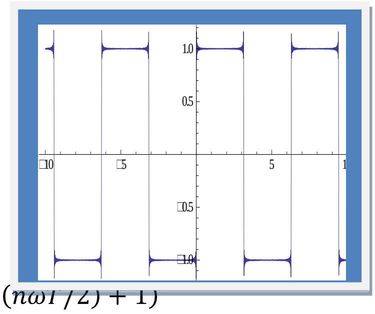
説明は省略するが，$f(t)$が偶（奇）関数なら，計算をせずに，$b_n\,(a_n)$がすべて 0 となることが分かる．

１４．計算例

問 18（1）

$$f(t)=\begin{cases}1\cdots 0<t<\frac{T}{2}\\ -1\cdots \frac{T}{2}<t<T\end{cases}$$

矩形波±1，duty 50%，原点でジャンプ



$a_0=0,\quad a_n=0$ （奇関数）

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\sin n\omega t\,dt=\frac{2}{T}\left(\int_{-T/2}^{0}(-1)\sin n\omega t\,dt+\int_{0}^{T/2}(+1)\sin n\omega t\,dt\right)$$

$$=\frac{2}{n\omega T}\left([\cos n\omega t]_{-T/2}^{0}-[\cos n\omega t]_{0}^{T/2}\right)=\frac{2}{n\omega T}(1-\cos(-n\omega T/2)-\cos(n\omega T/2)+1)$$

$$=\frac{2}{n\omega T}\times 2(1-\cos(n\omega T/2))=\frac{2}{n\cdot 2\pi}\times 2(1-\cos(n\cdot 2\pi/2))=\frac{2}{n\pi}(1-\cos(n\pi))$$

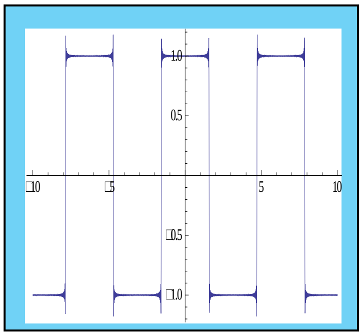
$$=\begin{cases}0 & \cdots n\text{が偶数}\\ \dfrac{4}{n\pi} & \cdots n\text{が奇数}\end{cases}$$

$$f(t)=\frac{4}{\pi}\left(\sin\omega t+\frac{1}{3}\sin 3\omega t+\frac{1}{5}\sin 5\omega t+\cdots\right)$$

18　(2)

$$f(t)=\begin{cases}1\cdots -\frac{T}{4}<t<\frac{T}{4}\\ -1\cdots -\frac{T}{2}<t<\frac{T}{2}\text{で上記以外}\end{cases}$$

矩形波±１，duty 50%，　t=0 が「1」の中央



$b_n=0$ （偶関数），　$a_0=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)dt=0,$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\cos n\omega t\,dt=2\times\frac{2}{T}\left(\int_{0}^{\frac{T}{4}}(+1)\cos n\omega t\,dt+\int_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}}(-1)\cos n\omega t\,dt\right)$$

$$=\frac{4}{T}\frac{1}{n\omega}\left([\sin n\omega t]_{0}^{T/4}-[\sin n\omega t]_{T/4}^{T/2}\right)=\frac{2}{n\pi}\left(2\sin\frac{n\pi}{2}-\sin n\pi\right)=\frac{4}{n\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)=\begin{cases}\dfrac{4}{n\pi}\cdots n\text{が }1,5,9,\ldots\\ -\dfrac{4}{n\pi}\cdots n\text{が }3,7,11,\ldots\end{cases}$$

としてもよいが，$f(t)$は 18(1)の関数を T/4 だけ左にずらしたもの:

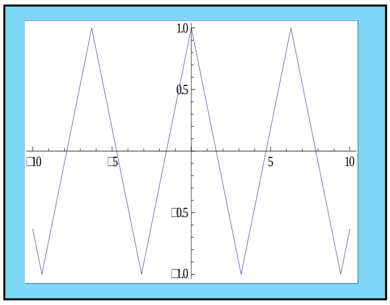
$$\sin\left[n\omega\left(t+\frac{T}{4}\right)\right]\underbrace{=}_{\text{加法定理}}\sin n\omega t\cos\frac{n\omega T}{4}+\cos n\omega t\sin\frac{n\omega T}{4}=\sin n\omega t\boxed{\cos\frac{n\pi}{2}}+\cos n\omega t\boxed{\sin\frac{n\pi}{2}}$$

18(1)は奇数の項だけで構成されているから，上式で$n=2m-1$とおくと最右辺第一項の□内は$\cos\frac{(2m-1)\pi}{2}=0,$

第二項の□内は　$\sin\frac{(2m-1)\pi}{2}=\begin{cases}1\cdots(2m-1)\text{が }1,5,9,\ldots\\ -1\cdots(2m-1)\text{が }3,7,11,\ldots\end{cases}$ となる．こうして

$$f(t)=\frac{4}{\pi}\left(\cos\omega t-\frac{1}{3}\cos 3\omega t+\frac{1}{5}\cos 5\omega t-\cdots\right)$$

18 (3)



$$f(t)=\begin{cases}1+4\frac{t}{T}\cdots-\frac{T}{2}<t\leq 0\\ 1-4\frac{t}{T}\cdots\quad 0<t\leq\frac{T}{2}\end{cases}$$ 三角波 ±１，t=0 でピーク，左右対称

偶関数だから　$b_n=0$

$a_0=0$，$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\cos n\omega t\,dt=2\times\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}(1-4\frac{t}{T})\cos n\omega t\,dt$

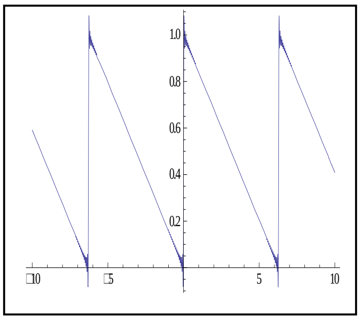
$$\int_0^{\frac{T}{2}}\cos n\omega t\,dt=0$$

$$\int_0^{\frac{T}{2}}t\cdot\cos n\omega t\,dt=\left[\frac{1}{n\omega}t\sin n\omega t+\frac{1}{(n\omega)^2}\cos n\omega t\right]_0^{T/2}=\frac{1}{(n\omega)^2}(\cos n\pi-1)$$

$$a_n=2\times\frac{2}{T}\times\frac{-4}{T}\frac{1}{(n\omega)^2}(\cos n\pi-1)=\begin{cases}\frac{8}{n^2\pi^2}\cdots\text{n が奇数}\\ 0\cdots\text{n が偶数}\end{cases}$$

$$f(t)=\frac{8}{\pi^2}\left\{\cos\omega t+\frac{1}{3^2}\cos 3\omega t+\frac{1}{5^2}\cos 5\omega t+\cdots\right\}$$

18 (4)



$f(t)=1-\frac{t}{T}\cdots 0<t<T$　　のこぎり波 1→0,　1/2 下にずらせば奇関数

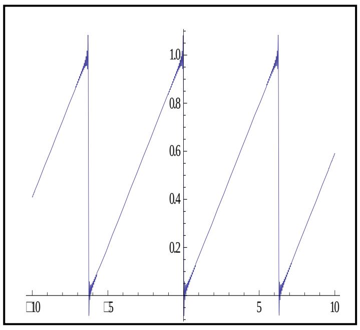
$$\int_0^T t\cdot\sin n\omega t\,dt=\left[-\frac{t}{n\omega}\cos n\omega t+\frac{1}{n^2\omega^2}\sin n\omega t\right]_0^T=\frac{-T}{n\omega}\cos 2\pi n=\frac{-T}{n\omega}$$

$a_0/2=1/2$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_0^T-\frac{t}{T}\cdot\sin n\omega t\,dt=-\frac{2}{T^2}\frac{-T}{n\omega}=\frac{1}{n\pi}$$

$$f(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\left(\sin\omega t+\frac{1}{2}\sin 2\omega t+\frac{1}{3}\sin 3\omega t+\cdots\right)$$

18 (5)



$f(t)=\frac{t}{T}\cdots 0<t<T$　　のこぎり波 0→1,　1/2 下にずらせば奇関数

18(4)の符号を反転し，１加える

$$f(t)=\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\left(\sin\omega t+\frac{1}{2}\sin 2\omega t+\frac{1}{3}\sin 3\omega t+\cdots\right)$$

１５．不連続点におけるフーリエ級数の収束とギブス振動

問 18 の(1)(2)(4)(5)と(3)の関数には，跳び（ジャンプ）があるか否かという本質的な差がある．

現実世界に現れる信号は，①振幅が無限に大きくなることはないし，②振動数が無限大になって極大極小の数が無限になるようなこともなく，③矩形波の信号のようなジャンプであっても角が少し丸まっている．このような信号は，周期的であれば必ずフーリエ級数に展開できることが知られている．

上の条件①と②はフーリエ展開ができるための必須の条件なのだが，③については少し緩めることができる．すなわち，周期内（あるいは端）に不連続点がいくつかあっても，その不連続点が互いに離れていれば，さらに不連続のジャンプが有限の幅であれば，その不連続点の位置を除いて，フーリエ級数ともとの信号とは一致する．

ジャンプがなければ（問 18 の(3)）フーリエ級数は項数を増やしていくと，全域でもとの関数を再現するようになる．ジャンプがあると（(1)(2)(4)(5)）ジャンプの位置ではフーリエ級数がもとの関数からずれた値に収束する．項数を増やしても，ジャンプする位置の付近の細かい振動がなかなか消えない．この振動が現れることを**ギブス現象**と呼ぶ．ギブスはアメリカの物理学者．

サインやコサインは，その振動数が大きいほど急峻に変化する．実際，たとえば $\sin n\omega t$の変化はその時間微分で与えられるから

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\sin n\omega t = n\omega \cos \mathrm{n\omega t}$$

であり，$n\omega$が大きいほど信号は急峻に変換する．したがって，ジャンプ（急激な信号の変化）をサインやコサインで再現使用とすると，n の大きい高調波を必要とする．これがギブス振動が起きる原因のひとつである．