

テーラー展開・マクローリン展開

(問A)

次の表はマクローリン展開 ( $x = 0$ のまわりのテーラー展開) による関数値の計算手順 (3次で打ち切った展開式を使う場合を想定) を示している.

- (1) それぞれの場合について 3次で打ち切った展開式を書け.
- (2) 計算を実行し, 表を完成させよ. (最終行は小数点以下 3桁まで真の値を示している. したがって, 計算は小数点以下 3桁まで十分である. 計算した値と真の値を比較検討せよ.)

$$e^x \simeq \boxed{A} + \boxed{B}x + \boxed{C}x^2 + \boxed{D}x^3$$

$x$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$x^2$	0.01	0.04	0.09	0.16	0.25
$x^3$	0.001	0.008	0.027	0.064	0.125
$A$					
$Bx$					
$Cx^2$					
$Dx^3$					
$e^x \simeq$					
$e^x =$	1.105 ...	1.221 ...	1.350 ...	1.492 ...	1.649 ...

$$\sin x \simeq \boxed{A} + \boxed{B}x + \boxed{C}x^2 + \boxed{D}x^3$$

$x(\text{degree})$	10	20	30	40	50
$x(\text{radian})$	0.175 ...	0.349 ...	0.524 ...	0.698 ...	0.873 ...
$x^2$	0.0305	0.1218	0.2742	0.4874	0.7615
$x^3$	0.0053	0.0425	0.1435	0.3403	0.6646
$A$					
$Bx$					
$Cx^2$					
$Dx^3$					
$\sin x \simeq$					
$\sin x =$	0.174 ...	0.342 ...	0.5	0.643 ...	0.766 ...

(問 B) マクローリン展開を用いて次の極限を計算せよ.

(1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ , (2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$ , (3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x}-2}{x}$ , (4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x}-2-\frac{x}{4}}{x^2}$ , (5)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x}$ , (6)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)-x}{x^2}$

(問 C) 双曲線関数  $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$  の  $x = 0$  の付近の形を 2 次関数で近似せよ.

(問 D)  $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$  の近似値を求めるため,  $f(x) = \cos x$  の  $x = \frac{\pi}{4}$  のまわりのテーラー展開を行う

$\left(\frac{2\pi}{5} > \frac{\pi}{4}\right)$  に注意してコサインのグラフを観察せよ).

(1)  $f(x)$  の展開の 3 次で打ち切った形を求めよ ( $x > \frac{\pi}{4}$ ).

用語: 3 次で打ち切った形 = 「3 次の多項式」

(2) (1) で得られた多項式を用いて  $f\left(\frac{2\pi}{5}\right)$  の近似値を計算するときの誤差を見積もれ.