テーラー展開・マクローリン展開

(問A)

次の表はマクローリン展開（$x=0$のまわりのテーラー展開）による関数値の計算手順（3 次で打ち切った展開式を使う場合を想定）を示している．

(1) それぞれの場合について 3 次で打ち切った展開式を書け．

(2) 計算を実行し，表を完成させよ．（最終行は小数点以下 3 桁まで真の値を示している．したがって, 計算は小数点以下 3 桁まで十分である. 計算した値と真の値を比較検討せよ.）

$$e^x \simeq \boxed{A} + \boxed{B}\,x + \boxed{C}\,x^2 + \boxed{D}\,x^3$$

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
x^2	0.01	0.04	0.09	0.16	0.25
x^3	0.001	0.008	0.027	0.064	0.125
A					
Bx					
Cx^2					
Dx^3					
$e^x \simeq$					
$e^x =$	1.105 ...	1.221 ...	1.350 ...	1.492 ...	1.649 ...

$$\sin x \simeq \boxed{A} + \boxed{B}\,x + \boxed{C}\,x^2 + \boxed{D}\,x^3$$

x(degree)	10	20	30	40	50
x(radian)	0.175 ...	0.349 ...	0.524 ...	0.698 ...	0.873 ...
x^2	0.0305	0.1218	0.2742	0.4874	0.7615
x^3	0.0053	0.0425	0.1435	0.3403	0.6646
A					
Bx					
Cx^2					
Dx^3					
$\sin x \simeq$					
$\sin x =$	0.174 ...	0.342 ...	0.5	0.643 ...	0.766 ...

(問 B) マクローリン展開を用いて次の極限を計算せよ．

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$, (2) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3}$, (3) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-2}{x}$, (4) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-2-\frac{x}{4}}{x^2}$, (5) $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}$, (6) $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-x}{x^2}$

(問 C)　双曲線関数$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$の$x = 0$の付近の形を 2 次関数で近似せよ.

(問 D) $f(x) = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$の近似値を求めるため，$x = \frac{\pi}{4}$のまわりのテーラー展開を行う($\frac{2\pi}{5} > \frac{\pi}{4}$).

(1) $f(x)$の展開の 3 次で打ち切った形を求めよ($x > \frac{\pi}{4}$).

用語： 3 次で打ち切った形」＝「3 次の多項式」

(2) (1)で得られた多項式を用いて$f\left(\frac{2\pi}{5}\right)$の近似値を計算するときの誤差を見積もれ.

(解 A)

$$e^x \simeq \boxed{1} + \boxed{1}\,x + \boxed{\frac{1}{2}}\,x^2 + \boxed{\frac{1}{6}}\,x^3$$

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
x^2	0.01	0.04	0.09	0.16	0.25
x^3	0.001	0.008	0.027	0.064	0.125
A	1	1	1	1	1
Bx	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
Cx^2	0.005	0.02	0.045	0.08	0.125
Dx^3	~~0.00017~~	0.0013	0.0045	0.011	0.021
$e^x \simeq$	1.105	1.221	1.350	1.491	1.646
$e^x =$	1.105 ...	1.221 ...	1.350 ...	1.492 ...	1.649 ...

$$\sin x \simeq \boxed{0} + \boxed{1}\,x + \boxed{0}\,x^2 + \boxed{-\frac{1}{6}}\,x^3$$

x(degree)	10	20	30	40	50
x(radian)	0.175 ...	0.349 ...	0.524 ...	0.698 ...	0.873 ...
x^2	~~0.0305~~	~~0.1218~~	~~0.2742~~	~~0.4874~~	~~0.7615~~
x^3	0.0053	0.0425	0.1435	0.3402	0.6646
A	0	0	0	0	0
Bx	0.175	0.349	0.524	0.698	0.873
Cx^2	0	0	0	0	0
Dx^3	$-.0009$	-0.0071	-0.0239	-0.0567	-0.1108
$\sin x \simeq$	0.174	0.342	0.500	0.641	0.762
$\sin x =$	0.174 ...	0.342 ...	0.5	0.643 ...	0.766 ...

(解 B)

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1,$　　(2) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{6}$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots, \quad , \frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \cdots \qquad \frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{3!} + \cdots$$

(3) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-2}{x} = \frac{1}{4},$　　(4) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-2-\frac{x}{4}}{x^2} = -\frac{1}{64}$

$$\sqrt{4+x} = \left[\sqrt{4+x}\right]_{x=0} + \left[\frac{1}{2\sqrt{4+x}}\right]_{x=0} x + \frac{1}{2!}\left[-\frac{1}{4(4+x)^{3/2}}\right]_{x=0} x^2 + \cdots = 2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{64}x^2 + \cdots$$

(5) $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1$,　　(6) $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-x}{x^2}=-\frac{1}{2}$

$$\log(1+x)=[\log(1+x)]_{x=0}+\left[\frac{1}{1+x}\right]_{x=0}x+\frac{1}{2!}\left[-\frac{1}{(1+x)^2}\right]_{x=0}x^2=0+x-\frac{1}{2}x^2$$

(解 C)

指数関数のマクローリン展開が

$$e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\cdots$$

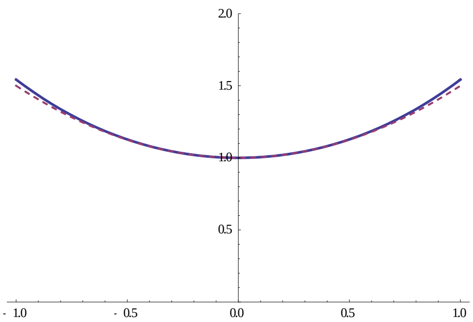
$$e^{-x}=1+(-x)+\frac{1}{2}(-x)^2+\frac{1}{6}(-x)^3+\cdots=1-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3+\cdots$$

となるので

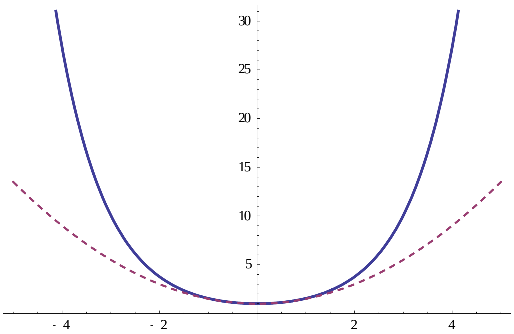
$$\cosh x=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})=\frac{1}{2}\left(1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\cdots\right)+\frac{1}{2}\left(1-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3+\cdots\right)$$

$$\simeq 1+\frac{1}{2}x^2$$

グラフで比較しよう（鎖線が 2 次関数）：



$[-1,1]$



$[-5,5]$

(解 D) テーラーの定理により次の式を満たすc ($\frac{\pi}{4}<c<x$)の存在が保障される：

$$f(x)=f\left(\frac{\pi}{4}\right)+f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}f''\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{1}{6}f^{(3)}\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+R_4(x),$$

$$R_4(x)=\frac{1}{24}f^{(4)}(c)\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4$$

ここで

$$f=\cos x,\quad f'=-\sin x,\quad f''=-\cos x,\quad f^{(3)}=\sin x,\quad f^{(4)}=\cos x$$

より

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}},\qquad f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{-1}{\sqrt{2}},\quad f''\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{-1}{\sqrt{2}},\qquad f^{(3)}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}},\qquad f^{(4)}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

となるので

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{1-\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{1}{6}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3\right\}+\frac{1}{24}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4\cos(c)$$

∴

$$f(x)\simeq\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{1-\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{1}{6}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\frac{x^3}{6}-\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{8}\right)x^2+\left(-1+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi^2}{32}\right)x+\left(1+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi^2}{32}-\frac{\pi^3}{384}\right)\right\}$$

(2)

$$f\left(\frac{2\pi}{5}\right)\simeq\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\frac{\left(\frac{2\pi}{5}\right)^3}{6}-\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\left(\frac{2\pi}{5}\right)^2+\left(-1+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi^2}{32}\right)\left(\frac{2\pi}{5}\right)+\left(1+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi^2}{32}-\frac{\pi^3}{384}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{1-\frac{3\pi}{20}-\frac{9\pi^2}{800}+\frac{9\pi^3}{16000}\right\}\simeq 0.308$$ （この行への変形は要求していない）

誤差は

$$R_4\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{1}{24}\left(\frac{2}{5}\pi-\frac{1}{4}\pi\right)^4\cos(c)=\frac{1}{24}\left(\frac{3\pi}{20}\right)^4\cos(c)=\frac{27\pi^4}{1280000}\cos(c)$$

$\frac{\pi}{4}<c<2\frac{\pi}{5}$の範囲で$\cos(c)$は単調減少関数だから，$\cos(c)<\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$となり，誤差は

$$R_4\left(\frac{2\pi}{5}\right)<\frac{27\pi^4}{1280000}\frac{1}{\sqrt{2}}\simeq 0.0015$$

以下と見積もられる．