一般的なこと

Q. $\frac{d}{dx}$の分子のdは何ですか？

A. fの微分dfとxの微分dxの比を$\frac{df}{dx}$と記したのがライプニッツであり，ライプニッツの発明は偉大だった．その後「微分**演算**」という概念が発達し，関数fに対してその導関数$\frac{df}{dx}$を対応させるという演算子（オペレータ，演算という作用をもつもの，演算の操作）を$\frac{d}{dx}$と書くようになった．同じ微分演算の記号を∂_xなどと書くひともいる．「$\frac{d}{dx}$の分子のdは何でもない」．

Q. 「微分せよ」と「微分を求めよ」はどこが違うのですか．

A. 正確に言うなら $\frac{df}{dx}$ はfの微分係数あるいは導関数であり，$\frac{df}{dx}$を求める作業を「fを微分する」という．同じく，正確に言うなら，fの微分がdf，xの微分がdxであり，「fの微分を求めよ」と言えばdfを求めることである．

正確な用語「微分」を知らなければ，「微分」とは「微分係数」の省略形だろうと想像してもしかたないし，そういう大人もたくさんいる．そういう大人と付き合う必要もあるから，文脈から状況を判断するしかない．

Q. 教科書 p.49 の(9)で，$\cos y \geq 0$と等号があるのに，式中で$\frac{1}{\cos y}$としてよいのですか．

A. この記述の「,」と「,」に挟まれた部分は挿入句であり逆三角関数の定義域および値域を思い出させる目的である．逆三角関数の定義域を記す意味では等号が不可欠だから，等号を残したのだろう．式の最後に$(\mathrm{x} \neq \pm 1)$という記述があり，これで$\cos y \neq 0$の宣言をしなおしたと考えるべきだろう．

問題 3-7[2]

Q. 問題の式を$t = \cdots$とおいて$\frac{dt}{dx}$、$\frac{dt}{dy}$を出すことはできないのですか．

A. できます．面倒でなければやってごらん．

Q. 各問を満たす x、y または$\mathrm{x} + \mathrm{dx}$、$\mathrm{y} + \mathrm{dy}$の組を用いないと解けない問題なのですか？

A. 講義で解説した陰関数微分のやり方を学ぶ問題．これができるようになったら他のやり

方も考えてみなさい.

Q. 陰関数微分を学ぶ目的は何ですか.

A. 陽関数になおして微分するのにくらべて格段に楽に dy/dx が求まることがあるから.
問題 3-7 の陰関数のどれでもよいから陽関数に直してから微分してごらん！

問題 3-7[2](2)

Q. 右辺の$\sin(x+y)$を微分すると$\cos(x+y)dx+\cos(x+y)dy$になる意味がわかりません。

A. 「微分を使って」というのを「微分して」と読み違えた？例 1 を自習するか，講義の解説を思い出しなさい.

Q. 解説に「マクローリン展開をつかうと・・・」という記述がありましたが，その意味がわかりません.

A. コサインのマクローリン展開：$\cos(t)=1+\frac{-1}{2}t^2+\frac{1}{4!}t^4+\cdots$から，t が微小なときは

$$\cos(t)\simeq 1-\frac{1}{2}t^2$$

としてよい．$(dx+dy)$は微小な量だから，$t=(dx+dy)$とおけば

$$\cos(dx+dy)\simeq 1-\frac{1}{2}(dx+dy)^2$$

ということで，別に大したことを言ったわけではない.

問題 3-7[2](3)

Q.はじめに両辺に xy をかけたら答えが変わってしまうのですが、なぜ xy をかけたらいけないのでしょうか？

A. $\frac{x^2}{y}-\frac{y}{x}+3=0$の両辺に$xy$をかけると

$$x^3-y^2+3xy=0$$

この微分をつくると

$$d(x^3-y^2+3xy)=3x^2dx-2y\,dy+3ydx+3xdy=(3x^2+3y)dx+(3x-2y)dy=0$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2+3y}{2y-3x}$$

これが巻末の解答と実は同じものであることは Webpage の資料にも掲載してある.

Q.解説の（☆）の式の下，$(x+dx)^3-(y+dy)^3+3(x+dx)(y+dy)=0$，という式はどこから出てきたのですか.

A.陰関数で書かれたxとyの関係が

$$x^3-y^2+3xy=0 \qquad (☆)$$

である．xの値が変化したとき，この式を満たすようにyの値が変化することで点(x, y)が移動して陰関数のグラフが描かれる．このグラフ上の近接した２点, (x, y)と$(x+dx, y+dy)$を結ぶ直線がグラフの接線となり，接線の傾きがdy/dxである．そこで（☆）に$(x+dx, y+dy)$を代入して dy と dx の関係を求める．

問題 3-7[2](4)

Q. dx、dy の値を求めるのは理解しましたが、$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}$の値が導き出し方が理解できません。

A. $dx = u(t)dt,\quad dy = v(t)dt$ となったら各辺の比をとる：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v(t)dt}{u(t)dt} = \frac{v(t)}{u(t)}$$

演習[1](2)

Q. 簡単に微分する方法はありませんか．

A. 私なら対数微分法を使うだろう．

演習[1](8)

Q. 合成関数の微分法を使うとありますが、合成関数の微分法がよくわかりません

A. 教科書の**索引**から調べよ．

演習[1](9)

Q. できないひとが大勢！

A. $\mathrm{y} = f\left(g\big(h(x)\big)\right) = \log\left(g\big(h(x)\big)\right) = \log(\log h(x)) = \log(\log(\log(x))),$

合成関数の微分法を用いると

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dh}\frac{dh}{dx} = \frac{d\log g}{dg}\frac{d\log h}{dh}\frac{d\log x}{dx} = \frac{1}{g}\frac{1}{h}\frac{1}{x} = \frac{1}{\log(\log x)}\frac{1}{\log x}\frac{1}{x}$$

となる．分母をさらに変形すると

$$\log(\log x)^{x\log x}$$

だが，こうしないほうがよいだろう．式は「読みやすい」「数値をいれてたとき計算しやすい」という基準に照らして簡潔なほうがよいが，べき乗にすると（いずれの基準にも）劣るように思う

演習[1](12)(13)

Q. arctan や arcsin の微分がわかりません．

A. 教科書 3-3 節で学んだ．同節の問題を参照せよ．

Webpage No.3-5 に，逆三角関数の練習問題がある．

演習[3]

Q. ライプニッツの公式がなんの役に立つかわかりません．

A. すぐ下の問題[4]で使う．高階の導関数を求めるときにつかう．
「機械的に」計算できるので，数式処理などのアルゴリズムに利用するには最適．
役に立たないものは学ぶ気がない？

演習[5](1)

Q. ミスプリでしょうか？巻末の最後の答えの式に至る変形がわかりません．

A. もしかして cot という関数名は教科書では初出．Webpage の資料を参照．

cot を知らなければ $\frac{1}{\tan x}$ で間違いではない．

サインに対するコサインは，三角関数を定義する直角三角形の直角を挟んだ２辺の交換により得られる．コサインはサインとともにあるもの．
タンジェントでは，直角を挟んだ２辺の交換を行うと，逆数が得られる．タンジェントの逆数がコタンジェント．コタンジェントはタンジェントとともにあるもの．

sin, cos, tan, cot 以外にも sec(セカント), csc（コセカント）がある．
cot, sec, csc は日本の高校では教わらないかもしれないが，万国共通の記号でみんな知っている．

https://ja.wikipedia.org/wiki/%E4%B8%89%E8%A7%92%E9%96%A2%E6%95%B0

演習[5](２)

Q. 教科書略解の式変形を解説してください．

A.

$$x(t) = \frac{3at}{1+t^3}, \qquad y(t) = \frac{3at^2}{1+t^3}$$

より，それぞれを t で微分すると

$$\frac{dx}{dt} = \frac{3a(1+t^3) - 3at(3t^2)}{(1+t^3)^2} = 3a\left\{\frac{1}{1+t^3} - \frac{3t^2}{(1+t^3)^2}\right\}$$

$$\frac{dy}{dt} = 3a\left\{\frac{2t}{1+t^3} - \frac{3t^3}{(1+t^3)^2}\right\}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3a\left\{\frac{2t}{1+t^3} - \frac{3t^3}{(1+t^3)^2}\right\}}{3a\left\{\frac{1}{1+t^3} - \frac{3t^2}{(1+t^3)^2}\right\}} = \frac{\frac{2t}{1+t^3} - \frac{3t^3}{(1+t^3)^2}}{\frac{1}{1+t^3} - \frac{3t^2}{(1+t^3)^2}} = \frac{2t(1+t^3) - 3t^3}{(1+t^3) - 3t^2}$$

$$= \frac{t(2(1+t^3) - 3t^3)}{1-2t^2} = \frac{t(2-t^3)}{1-2t^2}$$

演習[6]

Q. 双曲線関数の取り扱いが分かりません.

A.　教科書の索引から調べよ.

電卓のボタンや，プログラミング言語の組み込み関数にもあるのだから，だれでも使う関数である．この関数は理工系の常識！

http://suseum.jp/gq/question/1167

cosh が応用される例として「懸垂曲線（カテナリー）」:
http://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%82%AB%E3%83%86%E3%83%8A%E3%83%AA%E3%83%BC%E6%9B%B2%E7%B7%9A

双曲線関数の逆関数を知っていると，積分が簡単にできることもある.